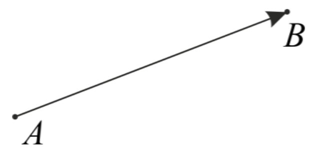
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

РАЗДЕЛ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1 Элементы векторной алгебры

Направленный отрезок. Понятие геометрического вектора. Сумма векторов. Произведение вектора на число

Отрезок, концы которого упорядочены, называется ***направленным отрезком***. Первый из его концов называется началом, а второй – концом направленного отрезка. ***Длиной*** направленного отрезка $\overline{AB}$ (обозначается $\left|\overline{AB}\right|$) называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overline{AB}$ называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}$.



Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***коллинеарными*** (обозначается $\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}$), если прямые AB и A_1B_1 паралельны или совпадают.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***сонаправленными*** (обозначается $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A_1B_1}$), если они коллинеарны и имеют одинаковое направление.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***противоположно направленными*** (обозначается $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A_1B_1}$), если они коллинеарны и имеют разные направления.

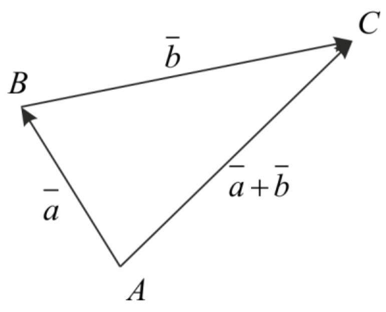
Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называется ***равными*** (обозначается $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$), если они сонаправлены и их длины совпадают.

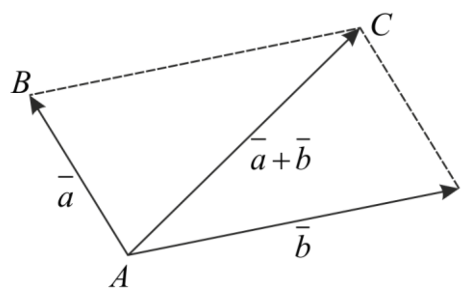
Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называется ***противоположными*** (обозначается $\overline{AB} = -\overline{A_1B_1}$), если они противоположно направлены и их длины совпадают.

Геометричеким вектором называется множество всех равных между собой направленных отрезков.

Про направленный отрезок $\overline{AB}$ можно сказать, что он является изображающим вектор $\overline{AB}$. Равные направленные отрезки изображают один и тот же вектор. Нулевым вектором называется вектор изображаемый нулевым направленным отрезком. Длиной вектора называется длина изображаемого его направленного отрезка. Векторы называются коллинеарными, если коллинеарны изображающие их направленные отрезки. Понятия сонаправленных и противоположно направленных, а также равных и противоположных векторов вводятся анологично.

Суммой векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{BC}$ называется вектор $\overline{AC}$, т.о. сложение осуществляется по правилу треугольника.





Сложение также можно определить и через правило параллелограмма.

Свойства опереции сложения векторов.

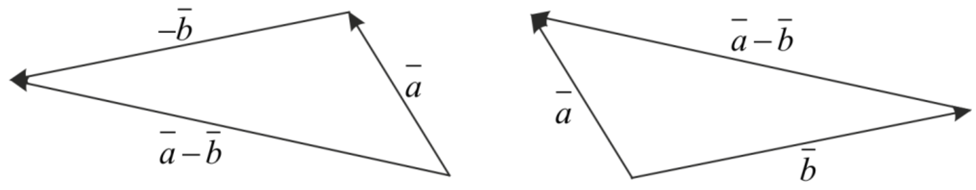
1°. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$;

3°. Существует вектор $\overline{0}$, такой что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}\quad\forall\overline{a}$. $\overline{0}$ – нулевой вектор.

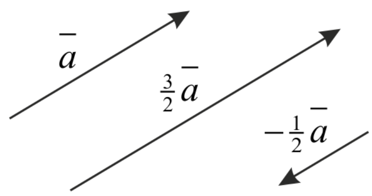
4°. $\forall\overline{a}\quad\exists\left(-\overline{a}\right)$, такой что $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\left(-\overline{a}\right)+\overline{a}=\overline{0}$. $-\overline{a}$ – противоположный вектор.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем называть вектор, равный $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$. Разность можно вычислять по правилу треугольника.



Произведением вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}$, который удволетворяет требованиям

1. $|\overline{b}|=|\alpha||\overline{a}|$;
2. $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, если $\alpha>0$,
3. $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, если $\alpha<0$.



Свойства операции умножения вектора на число.

1°. $0|\overline{a}|=\overline{0}$;

2°. $\alpha\cdot\overline{0}=\overline{0}$;

3°. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

4°. $\left(-1\right)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$;

5°. $\alpha\left(\beta\cdot\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\overline{a}$;

6°. $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}$;

7°. $\alpha\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}+\alpha\cdot\overline{b}$.

Понятие векторного пространства

Векторным пространством V называется некоторое множество произвольной математической природы, на котором определена операции сложения элементов (векторов) и умножения элемента (вектора) на число, удволетворяющие следующим условиям (аксиомам векторного пространства):

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}\quad\forall\overline{a},\overline{b}\in V$;

2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\quad\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$;

3) Существует вектор $\overline{0}$, такой что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V$. $\overline{0}$ – нулевой вектор.

4) $\forall\overline{a}\in V\quad\exists\left(-\overline{a}\right)\in V$, такой что $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\left(-\overline{a}\right)+\overline{a}=\overline{0}$. $-\overline{a}$ – противоположный вектор.

5) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V$;

6) $\alpha\left(\beta\cdot\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

7) $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

8) $\alpha\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}+\alpha\cdot\overline{b}\quad\forall\overline{a},\overline{b}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Примеры векторных пространств.

1. $\mathbb{R}^n=\left\{\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\mid a_k\in\mathbb{R}\right\}$ – векторное пространство строк длины n.

Сложение векторов и умножение вектора на число осуществляются по правилам

$$\left(a_1,a_2,...,a_n\right)+\left(b_1,b_2,...,b_n\right)=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n\right),\ \alpha\cdot\left(a_1,a_2,...,a_n\right)=\left(\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n\right).$$

Нулевой вектор – строка $\left(0,0,...,0\right)$. Вектор, противоположный к вектору $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ – строка $\left(-a_1,-a_2,...,-a_n\right)$.

2. $C\left[a,b\right]$ – множество непрерывных на отрезке $\left[a,b\right]$ функций. Сложение векторов и умножение вектора на число осуществляются по правилам $\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$, $\left(k\cdot f\right)\left(x\right)=k\cdot f\left(x\right)$. Нулевой вектор – функция, тождественно равная нулю $f\left(x\right)=0$. Вектор, противоположный к функции $f\left(x\right)$ – функция $-f\left(x\right)$.

3. V^2 – множество геометрических векторов плоскости.

4. V^3 – множество геометрических векторов пространства.

Простейшие свойства векторного пространства.

1°. Нулевой вектор только один;

2°. для каждого вектора существоет единственный ему противоположный;

3°. $0\cdot\overline{a}=\overline{0},\ \alpha\cdot\overline{0}=\overline{0}\quad\forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$;

4°. $\alpha\cdot\overline{a}=\overline{0}\Rightarrow\alpha=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$;

5°. $\left(-1\right)\cdot\overline{a}=-\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V$;

Пусть $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

6°. $\left(\alpha-\beta\right)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}-\beta\cdot\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

7°. $\alpha\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}-\alpha\cdot\overline{b}\quad\forall\overline{a},\overline{b}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Линейная зависимость и независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$ называется сумма

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{a_k},\quad\alpha_k\in\mathbb{R}.$$

Если все коэффициенты α_k линейной комбинации равны нулю, то такая линейная комбинация называется ***тривиальной***, в противном случае она называется ***нетривиальной***.

Говорят ,что вектор $\overline{b}$ раскладывается по векторам $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$ (или линейно выражается через векторы $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$), если он является некоторой их линейной комбинацией.

Набор векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ будем называть системой.

Система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если хотя бы один вектор системы выражается через остальные.

Система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется ***линейно независимой***, если ни один вектор из этой системы не может быть выражен через остальные.

Критерий линейной зависимости системы векторов: система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору, т.е. существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не равные одновременно нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Критерий линейной независимости системы векторов: система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда лишь тривиальная линейная комбинация векторов этой системы может равняться нулевому вектору.

Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе

Упорядоченая система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ векторного пространства V называется ***базисом*** этого пространства, если она линейно независима и любой вектор пространства V линейно выражается через эту систему.

Любые два базиса векторного пространства V содержат одинаковое количество векторов.

Размерностью векторного пространства V (обозначается $\dim V$) называется количество векторов в одном из его базисов. Если $\dim V = n$, то V – n-мерное пространство.

Примеры:

1. V^1 – множество геометрических векторов на прямой. $\dim V^1 = 1$, т.к. базис состоит из одного вектора;
2. V^2 – множество векторов плоскости. $\dim V^2 = 2$, базис состоит из двух векторов;
3. V^3 – множество векторов плоскости. $\dim V^3 = 3$, базис состоит из трех векторов;
4. $\mathbb{R}^n$ – множество строк длины n. $\dim \mathbb{R}^n = n$, в качестве базиса можно взять, например, систему строк $\overline{e_1} = (1, 0, ..., 0)$, $\overline{e_2} = (0, 1, ..., 0), \ldots, \overline{e_n} = (0, 0, ..., 1)$;
5. $C[a,b]$ – бесконечномерное пространство, т.к., например, система $\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx$ линейно независима при любом n.

Если $\dim V = n$, то любая линейно независимая система из n векторов образует базис этого пространства..

Если вектор $\overline{a}$ имеет в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ разложение $\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + ... + a_n \overline{e_n}$, то числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются ***координатами*** вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ (обозначается $\overline{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$).

Координаты вектора в данном базисе определены однозначно. Кординатная строка суммы векторов равна сумме кординатных строк слагаемых векторов. Координатная строка произведения вектора на число равна произведению числа на координатную строку этого вектора.

Скалярное произведение векторов

Углом между ненулевыми векторами $\overline{a}=\overline{OA}$ и $\overline{b}=\overline{OB}$ называется угол $\angle AOB$. Будем обозначать его через $(\overline{a},\overline{b})$. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определен.

Скалярным произведением ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b}).$$

Если хотя бы один из векторов нулевой,то скалярное произведение по определению равно нулю.

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cos(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}|^2$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^2$. Длина вектора и его скалярный квадрат связаны соотношением $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$, $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами острый, и отрицательно, если угол тупой.

Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые, то конус угла между ними можно найти по формуле

$$\cos(\overline{a},\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Основные свойства скалярного произведения.

1°. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;

2°. $\left(\alpha\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\alpha\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$;

3°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$;

4°. $\overline{a}\cdot\overline{a}>0$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$.

Если $(\overline{a},\overline{b})=\frac{\pi}{2}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***ортогональными*** (обозначаем $\overline{a}\perp\overline{b}$). Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны т. и т. т., когда их скалярное произведение равно нулю.

Вектор $\overline{a}$ называется ***нормированным***, если его длина равна 1.

Базис состоящий из нормированных попарно ортогональных векторов, называется ***ортонормированным***.

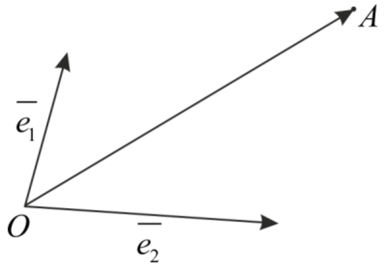
Если в ортонормированном базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}(b_1,b_2,b_3)$, то

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;
2. $a_1=\overline{a}\cdot\overline{e_1}$, $a_2=\overline{a}\cdot\overline{e_2}$, $a_3=\overline{a}\cdot\overline{e_3}$;
3. $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;
4. $\cos(\overline{a},\overline{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

1.2 Метод координат на плоскости

Аффинная система координат на плоскости

Совокупность точки и базиса векторов плоскости называется ***аффинной системой координат*** (или ***аффинным репером***) на плоскости. Будем обозначать аффинную систему координат с началом в точке O и базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ через $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$.



Вектор $\overline{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Соотношение $A \leftrightarrow \overline{OA}$ биективно.

Аффинными координатами точки A в репере $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

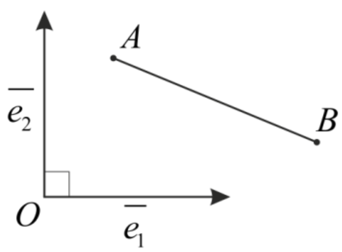
Если $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, то $\overline{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, т.е. чтобы найти координаты вектора, нужно из координаты конца вычесть координаты начала.

Если точка B получена смещением точки $A(a_1, a_2)$ на вектор $\overline{x}(x_1, x_2)$, то $B(a_1 + x_1, a_2 + x_2)$, т.е. чтобы сместить точку на вектор, необходимо сложить координаты этих точки и вектора.

Пусть A, B, C – коллинеарные (лежащие на одной прямой) точки и $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$. Число λ называется ***простым отношением*** точек A, B, C и обозначается $\lambda = (ABC)$.

Если C лежит между A и B, то говорят, что C делит отрезок AB в отношении λ.

Если $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $(ABC) = \lambda$, то $C\left(\dfrac{a_1 + \lambda b_1}{1+\lambda}, \dfrac{a_2 + \lambda b_2}{1+\lambda}\right)$.



Декартовой системой координат (***ортонормированным репером***) называется аффинная система координат, базис которой ортонормирован.

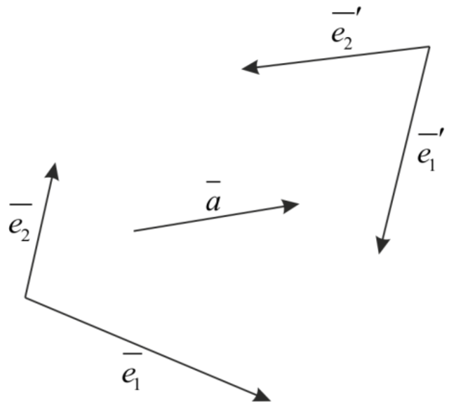
В декартовой системе координат расстояние между точками $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

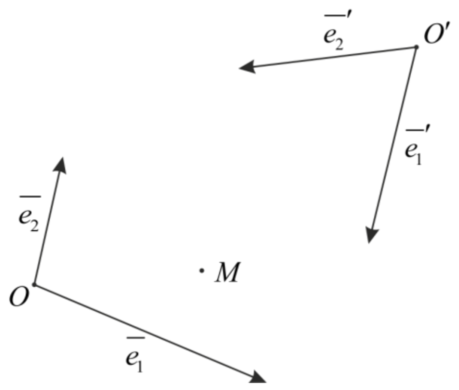
Формулы преобразования координат векторов и точек плоскости

Пусть $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) и $\overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2) – два базиса на плоскости. Первый условно будем называть старым, а второй – новым. Будем считать, что координаты векторов нового базиса относительно старого известны: $\overline{e_1}' = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2}$, $\overline{e_2}' = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2}$. Если вектор $\overline{a}$ имеет координаты $\overline{a}(x_1, x_2)$ в базисе (1) и $\overline{a}(x_1', x_2')$ в базисе (2), то его старые и новые координаты связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases}$$ – формулы преобразования координат векторов плоскости.



Присоединим к базисам (1) и (2) точки O и O', получим системы координат $O, \overline{e}_1, \overline{e}_2$ (3) и $O', \overline{e}_1', \overline{e}_2'$ (4). Пусть $O'(\alpha_1, \alpha_2)$ в старом репере (3), а точка M имеет координаты $M(x_1, x_2)$ в репере (3) и $M(x_1', x_2')$ в репере (4). Тогда ее старые и новые координаты связаны соотношениями

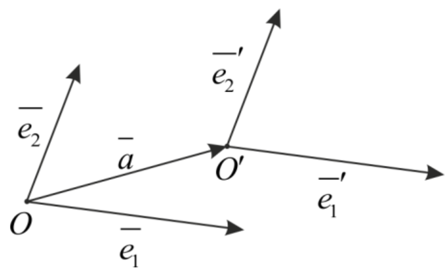


$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \alpha_1, \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \alpha_2 \end{cases}$$

– формулы преобразования координат точек плоскости.

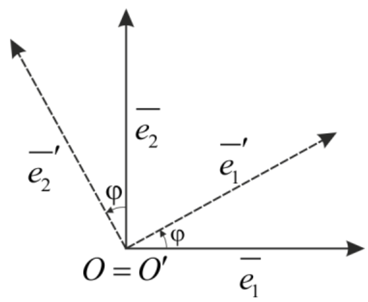
Формулы преобразования координат точек при параллельном переносе на вектор $\overline{a}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \alpha_1, \\ x_2 = x_2' + \alpha_2. \end{cases}$$



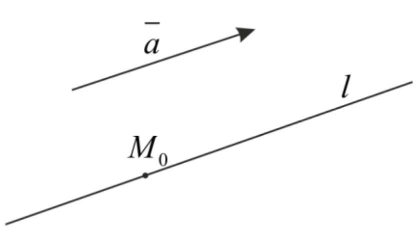
Формулы преобразования декартовых координат точек при повороте системы координат на угол φ

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos\varphi - x_2' \sin\varphi, \\ x_2 = x_1' \sin\varphi + x_2' \cos\varphi. \end{cases}$$



1.3 Прямая на координатной плоскости

Уравнение прямой в аффинной системе координат



Точкой $M_0(x_0, y_0)$ и вектором $\overline{a}(a_1, a_2)$ однозначно задается прямая, проходящая через точку M_0 и параллельная $\overline{a}$. Будем обозначать эту прямую $l : M_0, \overline{a}$. Вектор $\overline{a}$ называется ***направляющим*** вектором прямой l. Прямая имеет бесконечно много направляющих векторов, но все они коллинеарны между собой.

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$ – параметрическое представление прямой l,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$ – каноническое уравнение прямой l.

Каноническое уравнение легко преобразовать к виду $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой. Вектор с координатами $(-B, A)$ является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда

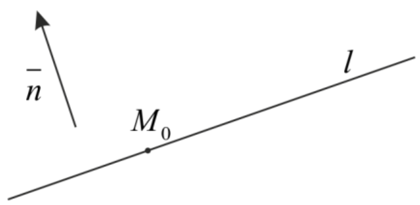
1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
2. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

(считаем, что отношение $\frac{0}{0}$ равно любому отношению).

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $l: Ax+By+C=0$ т. и т. т., когда числа $\alpha_1 = Ax_1+By_1+C$ и $\alpha_2 = Ax_1+By_1+C$ имеют один знак.

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $Ax+By+C<0$ (или $Ax+By+C>0$) есть одна из полуплоскостей относительно прямой $l: Ax+By+C=0$.

Уравнение прямой в декартовой системе координат



Вектор ***нормали*** прямой – это вектор, ортогональный направляющему вектору этой прямой. Все векторы нормали данной прямой коллинеарны между собой. Прямая однозначно задается точкой M_0 и вектором нормали $\bar{n}$.

Пусть в декартовой системе координат $M_0(x_0, y_0)$, $\bar{n}(n_1, n_2)$. Тогда прямая, определяемая точкой M_0 и вектором нормали $\bar{n}$, задается уравнением

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0.$$

Если в декартовой системе координат $l: Ax+By+C=0$, то вектор $\bar{n}(A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

В декартовой системе координат расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(M, l) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

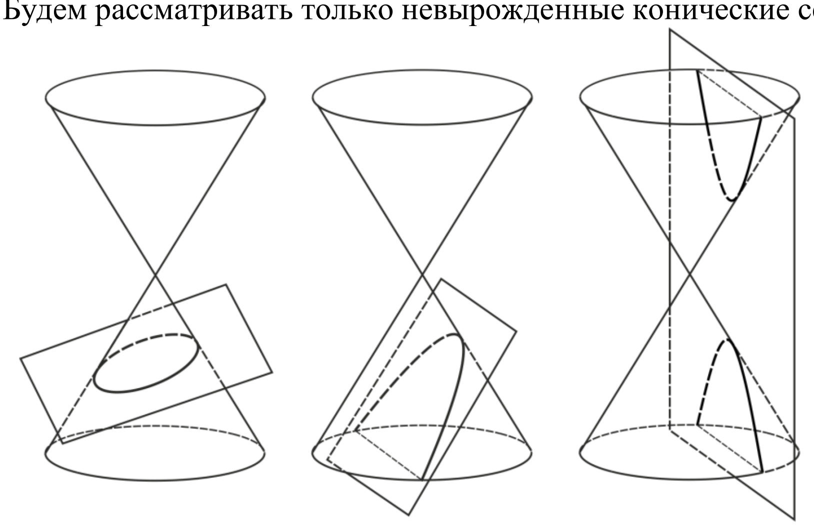
Косинус угла между прямыми, заданными в декартовой системе координат уравнениями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, вычисляется по формуле

$$\cos(l_1, l_2) = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_2^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

1.4 Линии второго порядка

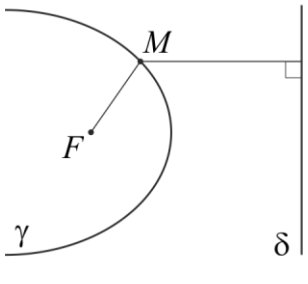
Конические сечения

Коническое сечение есть пересечение плоскости с круговым конусом. Существует три главных типа конических сечений: эллипс, парабола и гипербола (плоскость сечения не проходит через вершину эллипса). К вырожденным сечениям относятся точка, прямая и пара прямых. Будем рассматривать только невырожденные конические сечения.



Можно определить невырожденное коническое сечение и сразу на плоскости, не прибегая к рассмотрению конуса.

Пусть F – фиксированная точка плоскости, δ – фиксированная прямая, причем $F \notin \delta$. ***Коническим сечением*** будем называть множество точек, для каждой из которых отношение расстояния до F к расстоянию до δ есть величина постоянная



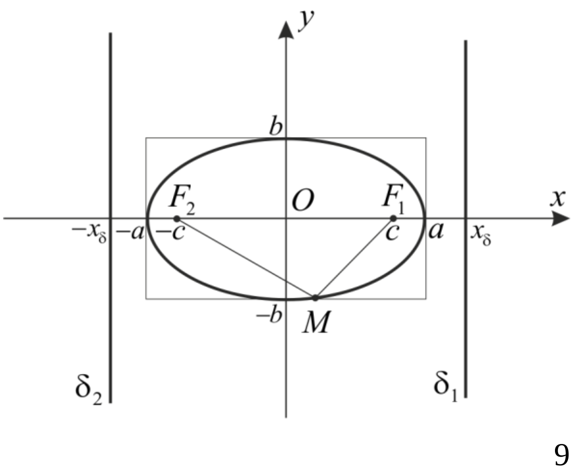
$$\gamma = \left\{ M \mid \frac{MF}{\rho(M,\delta)} = \varepsilon = const \right\}.$$

Точка F называется ***фокусом***, прямая δ – ***директрисой***, число ε – ***эксцентриситетом*** конического сечения. При $\varepsilon < 1$ коническое сечение является эллипсом, при $\varepsilon = 1$ – параболой, при $\varepsilon > 1$ – гиперболой.

Уравнения конических сечений в декартовых координатах. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы. Фокальные свойства конических сечений

Эллипс.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса в декартовых координатах. В каноническом уравнении $a > b$. Число a называется большой полуосью эллипса, b – малой полуосью. $|x| = a,\ |y| = b$ – основной прямоугольник эллипса. Точки с координатами $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ – вершины эллипса.



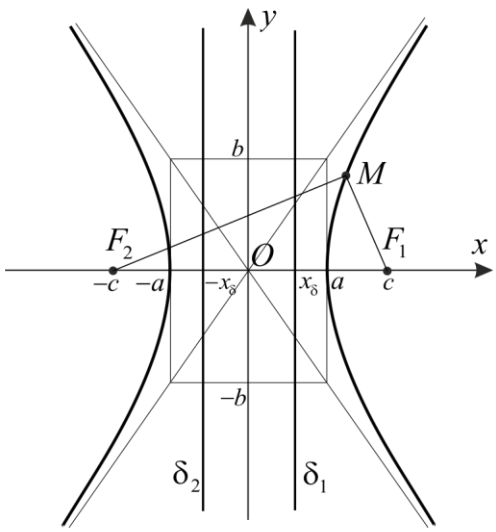
Оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса, поэтому у эллипса два фокуса и две директрисы. Фокусы находятся в точках $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Уравнения директрис: $\delta_{1,2}: x=\pm x_\delta$, где $x_\delta=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{\varepsilon}$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равна *2a*

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Гипербола.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы в декартовых координатах.



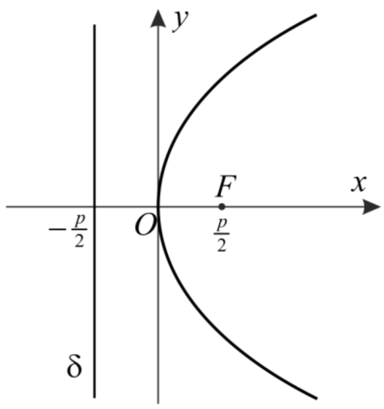
Число a называется действительной полуосью гиперболы, b – мнимой полуосью. $|x|=a,\ |y|=b$ – основной прямоугольник гиперболы. Точки с координатами $(a,0)$, $(-a,0)$ – вершины гиперболы.

Оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы, поэтому у гиперболы два фокуса и две директрисы. Фокусы находятся в точках $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Уравнения директрис: $\delta_{1,2}: x=\pm x_\delta$, где $x_\delta=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{\varepsilon}$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная *2a*

$$|MF_1-MF_2|=2a.$$

Парабола.



$y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы в декартовых координатах.

Точка $(0,0)$ – вершина параболы. Ось Ox является осью симметрии параболы. У параболы один фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и одна директриса $\delta: x=-\frac{p}{2}$.

Кривые второго порядка и их классификация

Кривая второго порядка – кривая, которая в некоторой аффинной системе координат Oxy задается уравнением второй степени от двух переменных

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad A^2+B^2+C^2>0.$$

Кривая второго порядка в любой аффинной системе координат задается уравнением второй степени.

Всякая кривая второго порядка есть одна из кривых: эллипс, гипербола, парабола, пара параллельных прямых, пара пересекающихся прямых, прямая, точка, пустое множество.

Примеры:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс;

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола;

3. $y^2=2px$ – парабола;

4. $xy=0$ – пара пересекающихся прямых;

5. $x^2=1$– пара параллельных прямых;

6. $x^2=0$ – прямая;

7. $x^2+y^2=0$ – точка;

8. $x^2+y^2+1=0$ – пустое множество.

Эта классификация была известна уже Ферма, ему же принадлежит основная идея доказательства:

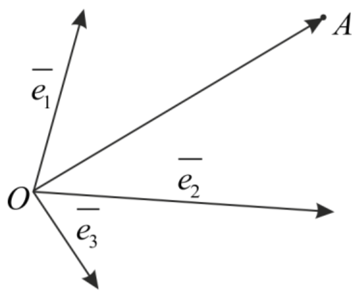
1. Выбираем произвольную декартовую систему координат Oxy, в ней кривая задается уравнением второй степени;
2. Поворачиваем систему координат вокруг начала координат на такой острый угол, чтобы в новой системе координат $O'x'y'$ в уравнении отсутствовало слагаемое Bxy.
3. Подвергаем систему координат $O'x'y'$ параллельному переносу, чтобы в полученной системе координат $O''x''y''$ кривая задавалась еще более простым уравнением, тогда ее можно опознать.

РАЗДЕЛ II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов

Аффинная и декартова системы координат в пространстве

Совокупность точки и базиса векторов пространства называется ***аффинной системой координат*** (или ***аффинным репером***) в пространстве. Будем обозначать аффинную систему координат с началом в точке O и базисом $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ через $O,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$.



Вектор $\overline{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки *A*. Соотношение $A\leftrightarrow\overline{OA}$ биективно.

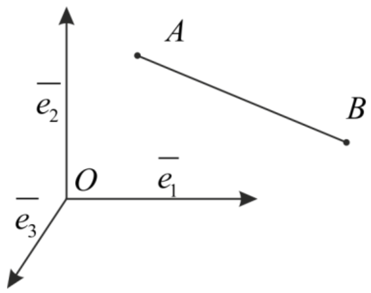
Аффинными координатами точки *A* в репере $O,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$ в базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$.

Если $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, то $\overline{AB}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, т.е. чтобы найти координаты вектора, нужно из координаты конца вычесть координаты начала.

Если точка B получена смещением точки $A(a_1,a_2,a_3)$ на вектор $\overline{x}(x_1,x_2,x_3)$, то $B(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3)$, т.е. чтобы сместить точку на вектор, необходимо сложить координаты этих точки и вектора.

Если $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ и $(ABC)=\lambda$, то

$$C\left(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}\right).$$



Декартовой системой координат (***ортонормированным репером***) называется аффинная система координат, базис которой ортонормирован.

В декартовой системе координат расстояние между точками $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ находится по формуле

$$|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}\ .$$

Векторное произведение векторов

Будем считать, что в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ все векторы выходят из одной точки. Если из конца вектора $\overline{e}_3$ кратчайший поворот вектора $\overline{e}_1$ к вектору $\overline{e}_2$ происходит против часовой стрелки, то базис $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ называется правым, если по часовой – левым.

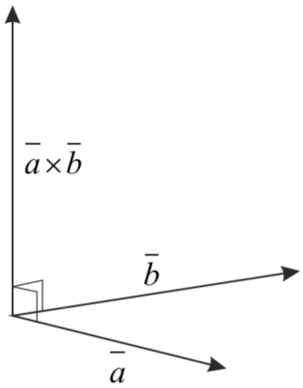
Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\overline{c}|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\left(\overline{a},\overline{b}\right)$;

2. $\overline{c}\perp\overline{a},\ \ \overline{c}\perp\overline{b}$;

3. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то базис $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ правый.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем обозначать через $\overline{a}\times\overline{b}$.



Основные свойства векторного произведения.

1°. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;

2°. $\left(\alpha\overline{a}\right)\times\left(\beta\overline{b}\right)=\alpha\beta\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$;

3°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.

Геометрический смысл модуля векторного произведения: длина векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Пусть в правом ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}(b_1,b_2,b_3)$, тогда

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\overline{k}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число, равное $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

Смешанное произведение векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ будем обозначать через $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.

Основные свойства смешанного произведения.

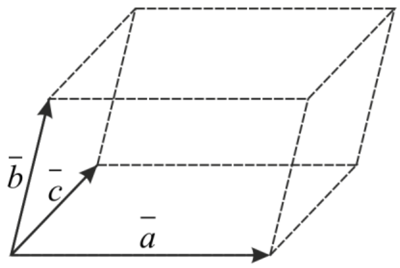
1°. При циклической перестановке множителей смешанное произведение не изменяется, при нарушении цикличности оно меняет знак

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right)=\left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)=-\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=-\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right);$$

2°. $\left(\alpha\bar{a},\beta\bar{b},\gamma\bar{c}\right)=\alpha\beta\gamma\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$;

3°. Смешанное произведение дистрибутивно относительно каждого из множителей

$$\left(\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a}_1,\bar{b},\bar{c}\right)+\left(\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right).$$



Геометрический смысл модуля смешанного произведения: модуль смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

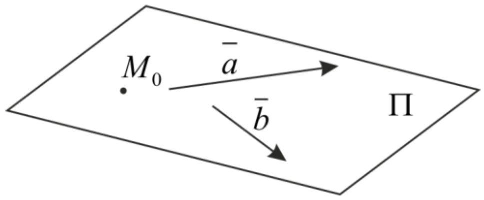
Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны $\Leftrightarrow\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$.

Пусть в правом ортонормированном базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имеют координаты $\bar{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\bar{b}\left(b_1,b_2,b_3\right)$, $\bar{c}\left(c_1,c_2,c_3\right)$, тогда

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}.$$

2.2 Плоскости и прямые в пространстве

Уравнение плоскости



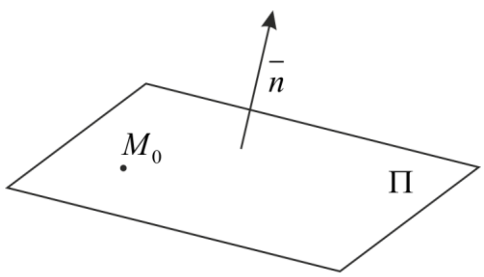
Вектор, параллельный плоскости, называется ***направляющим*** вектором этой плоскости. Плоскость однозначно определяется своей точкой M_0 и двумя неколлинеарными направляющими векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Будем в этом случае писать $\Pi: M_0,\bar{a},\bar{b}$. Если $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\bar{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\bar{b}\left(b_1,b_2,b_3\right)$, то уравнение плоскости Π будет иметь вид

$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$Ax+By+Cz+D=0$$

– общее уравнение плоскости.



Вектор, перпендикулярный плоскости, называется ***нормальным*** вектором (или вектором ***нормали***) этой плоскости. Плоскость однозначно определяется своей точкой M_0 и вектором нормали $\bar{n}$.

Если $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\bar{n}\left(n_1,n_2,n_3\right)$, то плоскость Π задается уравнением

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0.$$

Если плоскость задается своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор с координатами (A,B,C) – ее вектор нормали.

Пусть $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда

1. $\Pi_1=\Pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$;
2. $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

Следовательно, можно считать, что уравнения параллельных плоскостей отличаются лишь свободными членами.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то косинус угла между плоскостями Π_1 и Π_2 можно найти через косинус угла между их нормальными векторами $\overline{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2,B_2,C_2)$

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

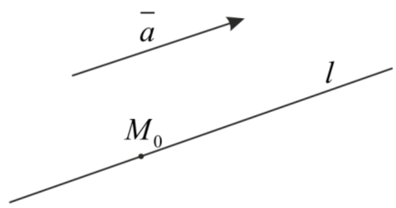
Точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ лежат в одном полупространстве относительно плоскости $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ т. и т. т., когда числа $\alpha_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ и $\alpha_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ имеют один знак.

Прямая в пространстве

Точкой $M(x_0,y_0,z_0)$ и вектором $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$ однозначно задается прямая, проходящая через точку M_0 и параллельная $\overline{a}$. Будем обозначать эту прямую $l: M_0,\overline{a}$. Вектор $\overline{a}$ называется ***направляющим*** вектором прямой l.

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$$ – параметрическое представление прямой l,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$ – каноническое уравнение прямой l.



Также прямая может быть задана как пересечение двух плоскостей с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

определяющих эти плоскости.

Пусть $l: \dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$. Синус угла между прямой и плоскостью можно вычислить через косинус угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\overline{a},\overline{n}\right)\right| = \frac{\left|\overline{a}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|a_1A + a_2B + a_3C\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.3 Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, которая в произвольной аффинной системе координат задается уравнением второй степени от трех неизвестных

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{13}xz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0,$$

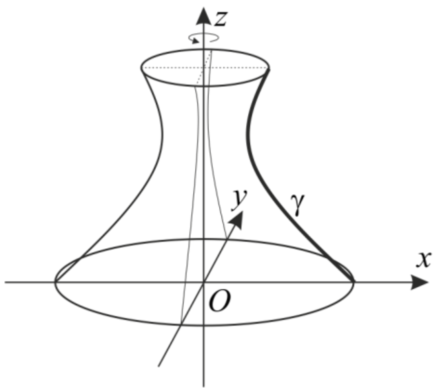
где хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ отличен от нуля.

Далее полагаем, что система координат – декартова.

Поверхности вращения

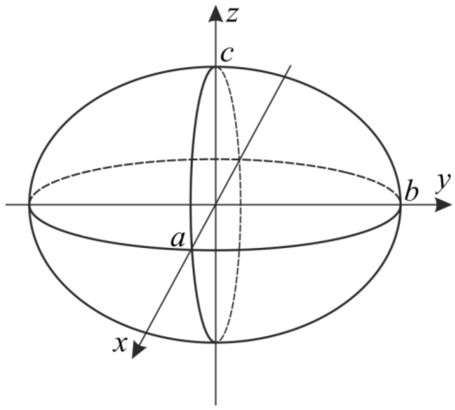
Пусть $\gamma : x = f(z)$ – кривая, лежащая в плоскости xOy. При вращении кривой γ около оси Oz описывается некоторая поверхность Φ, называемая поверхностью вращения. При этом γ называется профилем вращения, ось Oz – осью вращения. Уравнение поверхности Φ имеет вид

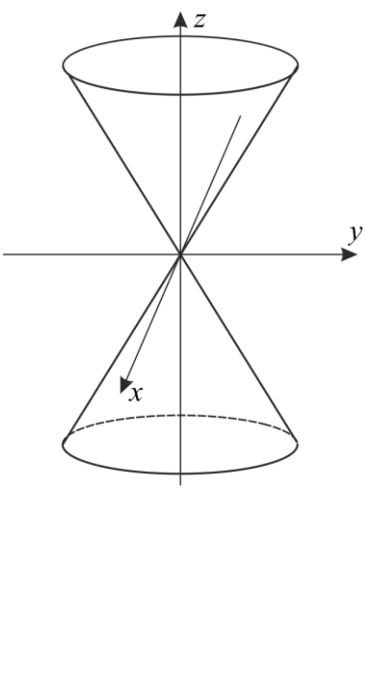
$$\Phi : x^2 + y^2 = f(z)^2.$$



Основные типы поверхностей второго порядка и их канонические уравнения

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – ***эллипсоид***. Числа a, b, c называют полуосями эллипсоида. Если все полуоси различны, то эллипсоид называется трехосным. Если равны две полуоси, то эллипсоид является поверхностью вращения и называется эллипсоидом вращения. При $a = b = c$ эллипсоид представляет сферу.



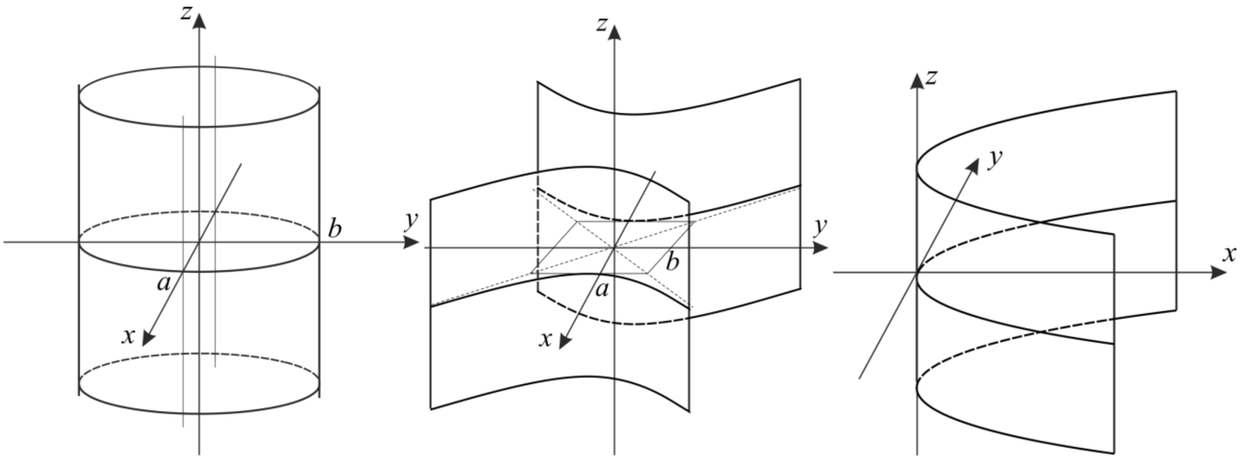


$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – ***конус второго порядка***. При $a = b$ конус является круговым.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ***эллиптический цилиндр***.

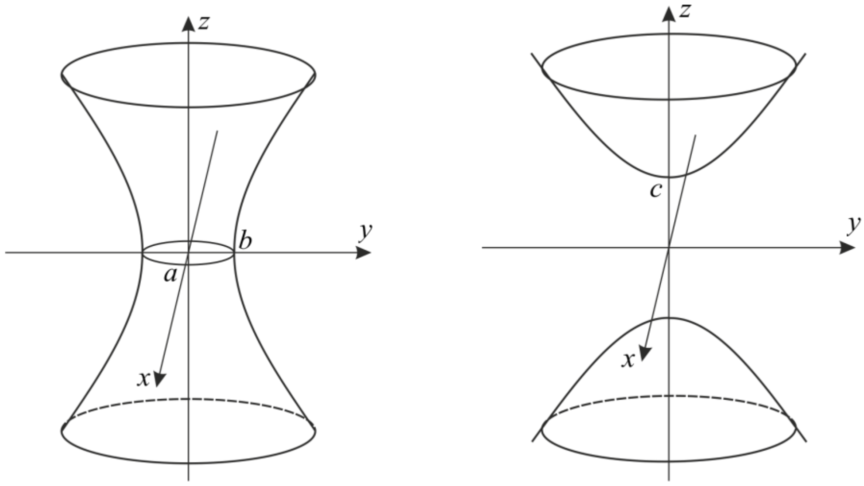
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ***гиперболический цилиндр***.

$y^2 = 2px$ – ***параболический цилиндр***.



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – ***однополостный гиперболоид***.

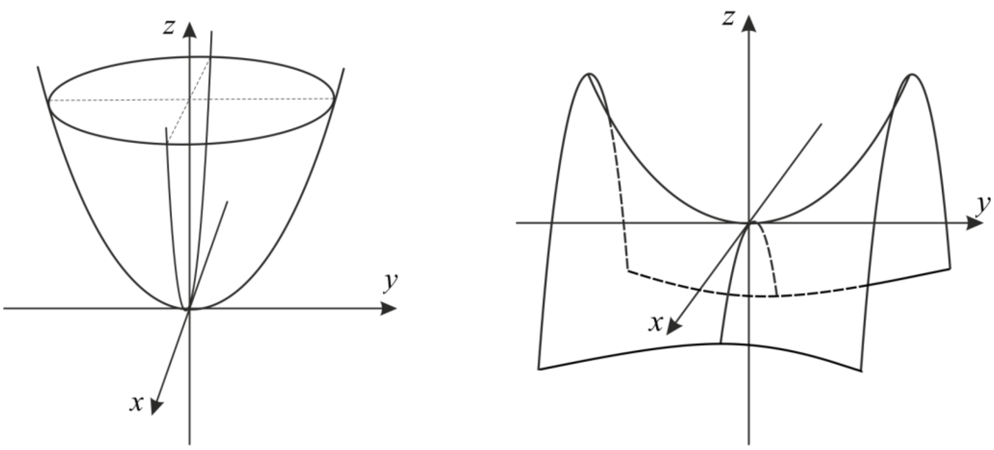
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – ***двуполостный гиперболоид***.



При $a=b$ гиперболоиды являются поверхностями вращения.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ – ***эллиптический параболоид***. При $a=b$ называется параболоидом вращения.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ – ***гиперболический параболоид***.



Линейчатые поверхности второго порядка

Поверхность называется ***линейчатой***, если через каждую ее точку проходит хотя бы одна прямая, целиком лежащая на этой поверхности. Такая прямая называется ***прямолинейной образующей*** поверхности.

Очевидно, цилиндры и конусы второго порядка – линейчатые поверхности. К линейчатым поверхностям второго порядка также принадлежат однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Прямые

$$l_1(\lambda_1):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_1}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}\qquad l_2(\lambda_2):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_2}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$

при любых $\lambda_1,\ \lambda_2$ лежат на однополостном гиперболоиде $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, поэтому однополостный гиперболоид имеет два семейства $\{l_1(\lambda_1)\}$ и $\{l_2(\lambda_2)\}$ прямолинейных образующих. Через каждую его точку проходит две прямолинейные образующие – по одой из каждого семейства.

Прямые

$$l_1(\lambda_1):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\lambda_1 z,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\lambda_1},\end{cases}\qquad l_2(\lambda_2):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda_2 z,\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\lambda_2}\end{cases}$$

при любых $\lambda_1,\ \lambda_2$ лежат на гиперболическом параболоиде $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, поэтому гиперболический параболоид имеет два семейства $\{l_1(\lambda_1)\}$ и $\{l_2(\lambda_2)\}$ прямолинейных образующих. Через каждую его точку проходит две прямолинейные образующие – по одой из каждого семейства.