АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

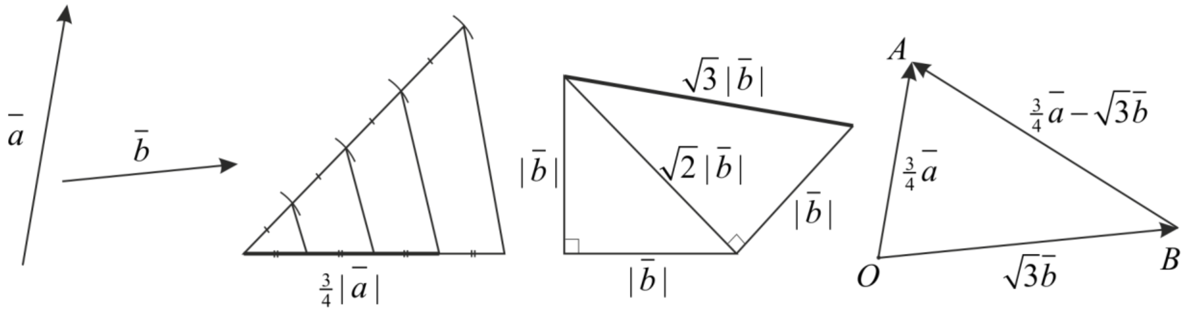
РАЗДЕЛ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Элементы векторной алгебры

1. Направленный отрезок. Понятие геометрического вектора. Сумма векторов. Произведение вектора на число

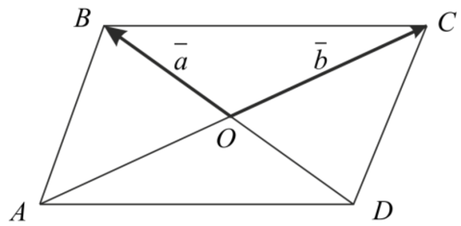
Примеры решения задач

Задача 1. Даны неколлинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. С помощью циркуля и линейки построить вектор $\frac{3}{4}\overline{a}-\sqrt{3}\overline{b}$.



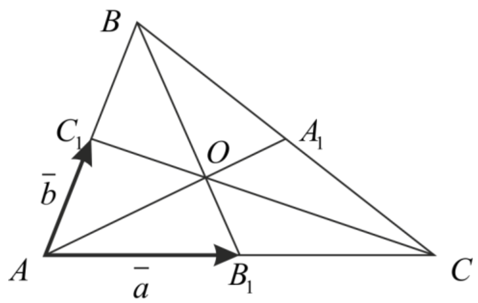
Решение. Построим отрезки длины $\frac{3}{4}|\overline{a}|$ и $\sqrt{3}|\overline{b}|$. Для этого воспользуемся теоремами Фалеса и спиралью Архимеда. Отложим найденные отрезки от одной точки O параллельно соответствующим векторам, получим векторы $\overline{OA}=\frac{3}{4}\overline{a}$ и $\overline{OB}=\sqrt{3}\overline{b}$. По правилу вычитания векторов $\overline{BA}=\frac{3}{4}\overline{a}-\sqrt{3}\overline{b}$.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей, $\overline{a}=\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{AD}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{OD}$, $\overline{DC}$.



Решение. По правилу вычитания векторов $\overline{BC}=\overline{b}-\overline{a}$. Так как в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, получим $\overline{CA}=-2\overline{b}$, $\overline{OD}=-\overline{a}$. И, наконец, $\overline{DC}=\overline{DO}+\overline{OC}=\overline{a}+\overline{b}$.

Задача 3. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.



Решение. Обозначим $\overline{a}=\overline{AB_1}$, $\overline{b}=\overline{AC_1}$. Тогда

$\overline{OA}=-\frac{2}{3}\overline{AA_1}=-\frac{2}{3}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$,

$\overline{OB}=\frac{2}{3}\overline{B_1B}=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}-\overline{AB_1}\right)=\frac{2}{3}\left(2\overline{b}-\overline{a}\right)$,

$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{C_1C}=\frac{2}{3}\left(\overline{AC}-\overline{AC_1}\right)=\frac{2}{3}\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)$.

Таким образом,

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=-\frac{2}{3}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\frac{2}{3}\left(2\overline{b}-\overline{a}\right)+\frac{2}{3}\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)=\frac{2}{3}\left(2\overline{b}-\overline{a}+2\overline{a}-\overline{b}-\overline{a}-\overline{b}\right)=\overline{0}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Пусть $\bar{b}=\alpha\bar{a},\ \alpha>0,\ \bar{c}=\beta\bar{a},\ \beta<0$. Выразить α и β через длины соответствующих векторов.

1.2. Доказать, что ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны т. и т. т., когда $\bar{b}=\alpha\bar{a}$.

1.3. Даны неколлинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. С помощью циркуля и линейки построить векторы

а) $\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$; б) $\bar{b}-2\bar{a}$; в) $\frac{2}{5}\bar{b}-\sqrt{3}\bar{a}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b}$.

1.4. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – неколлинеарные векторы. Доказать, что любой вектор плоскости $\bar{c}$ можно представить в виде $\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$, причем коэффициенты α и β определены однозначно.

1.5. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $\bar{a}=\overline{AC},\ \bar{b}=\overline{BD}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

1.6. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей, $\bar{a}=\overline{AB},\ \bar{b}=\overline{AD}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{OA}$.

1.7. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\bar{a}=\overline{AB_1},\ \bar{b}=\overline{AC_1}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$.

1.8. В треугольнике ABC сторона BC делится точкой D в отношении $m:n$. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\bar{a}=\overline{AB}$ и $\bar{b}=\overline{AC}$.

1.9. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.

1.10. В треугольнике ABC точки A_1,B_1,C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Доказать, что $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\bar{0}$.

1.11. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Доказать, что $\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$.

2. Линейная зависимость и независимость векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Система векторов $\bar{b},\bar{c},\bar{e}$ линейно зависима. Доказать, что система $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e}$ тоже линейно зависима.

Решение. По определению линейной зависимости один из векторов системы $\bar{b},\bar{c},\bar{e}$ линейно выражается через остальные. Не ограничивая общность рассуждений, будем считать, что это вектор $\bar{b}$. Тогда существуют числа α_1,α_2, что $\bar{b}=\alpha_1\bar{c}+\alpha_2\bar{e}$. Переписав это равенство в виде $\bar{b}=0\cdot\bar{a}+\alpha_1\bar{c}+0\cdot\bar{d}+\alpha_2\bar{e}$, получим, что вектор $\bar{b}$ линейно выражается через остальные векторы системы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e}$, следовательно, эта система линейно зависима по определению.

Задача 2. Доказать, что если система векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ линейно независима, то система $\bar{a}-3\bar{b},2\bar{a}+\bar{c},\ \bar{b}-\bar{c}$ также линейно независима.

Решение. От противного, допустим, что система $\overline{a}-3\overline{b}, 2\overline{a}+\overline{c}, \overline{b}-\overline{c}$ линейно зависима, тогда по критерию линейной зависимости существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство

$$\alpha_1\left(\overline{a}-3\overline{b}\right)+\alpha_2\left(2\overline{a}+\overline{c}\right)+\alpha_3\left(\overline{b}-\overline{c}\right)=\overline{0}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные при $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$

$$\left(\alpha_1+2\alpha_2\right)\overline{a}+\left(\alpha_3-3\alpha_1\right)\overline{b}+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\overline{c}=\overline{0}.$$

Система векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независима, поэтому, согласно критерию линейной независимости, последнее равенство может иметь место лишь в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0,\\ \alpha_3-3\alpha_1=0,\\ \alpha_2-\alpha_3=0,\end{cases}$$

решая которую находим $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, что противоречит предположению.

Задача 3. При каких $x\in\mathbb{R}$ система строк $(-2x,-1,4)$, $(-1,0,-x)$, $(0,x,6)$ линейно зависима?

Решение. Система строк линейно зависима т. и т. т., когда существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство

$$\alpha_1(-2x,-1,4)+\alpha_2(-1,0,-x)+\alpha_3(0,x,6)=(0,0,0).$$

По определению умножения строки на число, сложения строк и равенства строк получим

$$\left(-2x\alpha_1,-\alpha_1,4\alpha_1\right)+\alpha_2\left(-\alpha_2,0,-x\alpha_2\right)+\left(0,x\alpha_3,6\alpha_3\right)=(0,0,0),$$

$$\left(-2x\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1+x\alpha_3,4\alpha_1-x\alpha_2+6\alpha_3\right)=(0,0,0),$$

$$\begin{cases}-2x\alpha_1-\alpha_2=0,\\ -\alpha_1+x\alpha_3=0,\\ 4\alpha_1-x\alpha_2+6\alpha_3=0.\end{cases}$$

Необходимо найти такие значения x, при которых эта система имеет нетривиальные решения относительно $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Выражая α_2 и α_3 из первого и второго уравнений через α_1 и подставляя полученные выражения в третье уравнение, получим

$$4\alpha_1+2x^2\alpha_1+\frac{6\alpha_1}{x}=0,$$

$$\frac{\alpha_1}{x}\left(x^3+2x+3\right)=0.$$

Проверив, что при $\alpha_1=0$ или $x=0$ система будет иметь только тривиальное решение, заключаем, что искомыми значениями x будут лишь корни уравнения $x^3+2x+3=0$. Решая его, находим единственное решение $x=-1$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

2.2. Доказать, что любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

2.3. Доказать, что любая система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2.4. Доказать, что если система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ линейно независима, а система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}, \overline{b}$ – линейно зависима, то вектор $\overline{b}$ линейно выражается через векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$.

2.5. Доказать, что если система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независима, то система $\overline{a}+\overline{b},\ \overline{a}-2\overline{c},\ \overline{b}+\overline{c}$ также линейно независима.

2.6. При каких $x \in \mathbb{R}$ система строк $(1+x, 1-x)$, $(1-x, 1+x)$ линейно зависима?

2.7. При каких $x \in \mathbb{R}$ система строк $(x,1,0)$, $(1,x,1)$, $(0,1,x)$ линейно зависима?

2.8. Проверить линейную зависимость систем строк

а) $(-2,1)$, $(1,-1)$;

б) $(1,1,0)$, $(1,-2,3)$, $(-5,1,0)$;

в) $(2,0,-3)$, $(-1,-2,4)$, $(0,-4,2)$.

2.9. Доказать, что система из двух геометрических векторов линейно зависима т. и т. т., когда эти векторы коллинеарны.

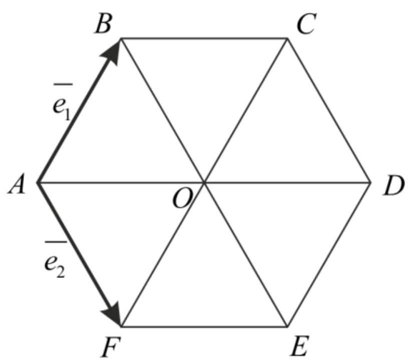
2.10. Доказать, что любая система из трех геометрических векторов плоскости линейно зависима.

2.11. Доказать, что система из трех геометрических векторов пространства линейно зависима т. и т. т., когда эти векторы компланарны.

3. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе

Примеры решения задач

Задача 1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AF}$. Найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{BE}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.



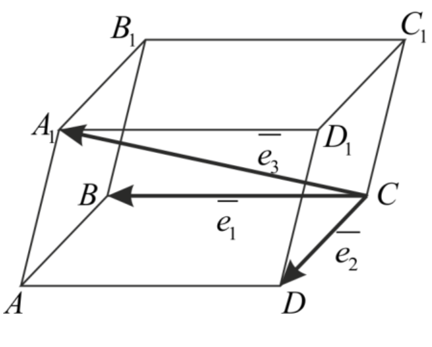
Решение. $\overline{BC} = \overline{AO} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$, $\overline{BC}(1,1)$.

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2\overline{BC} - \overline{AB} = 2\left(\overline{e_1} + \overline{e_2}\right) - \overline{e_1} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2}$, $\overline{BD}(1,2)$.

$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \overline{e_2} - \overline{e_1}$, $\overline{BF}(-1,1)$.

$\overline{BE} = 2\overline{AF} = 2\overline{e_2}$, $\overline{BE}(0,2)$.

Задача 2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1} = \overline{CB}$, $\overline{e_2} = \overline{CD}$, $\overline{e_3} = \overline{CA_1}$. Найти координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{D_1B}$, $\overline{AA_1}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.



Решение. $\overline{AD} = -\overline{CB} = -\overline{e_1}$, $\overline{AD}(-1,0,0)$.

$\overline{AC} = -\overline{CA} = -\left(\overline{CB} + \overline{CD}\right) = -\overline{e_1} - \overline{e_2}$, $\overline{AC}(-1,-1,0)$.

$\overline{B_1C} = \overline{B_1A_1} + \overline{A_1C} = \overline{e_2} - \overline{e_3}$, $\overline{B_1C}(0,1,-1)$.

$\overline{D_1B} = \overline{D_1A_1} + \overline{A_1B} = \overline{D_1A_1} + \overline{CB} - \overline{CA_1} = \overline{e_1} + \overline{e_1} - \overline{e_3} = 2\overline{e_1} - \overline{e_3}$,

$\overline{D_1B}(2,0,-1)$. $\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1} = \overline{AB} + \overline{CA_1} - \overline{CB} = -\overline{e_2} + \overline{e_3} - \overline{e_1}$, $\overline{AA_1}(-1,-1,1)$.

Задача 3. Доказать, что система строк $\overline{e_1}=(1,-2,0)$, $\overline{e_2}=(0,1,-1)$, $\overline{e_3}=(3,0,2)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\overline{a}=(5,-5,3)$ в этом базисе.

Решение. Докажем сначала, что система $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ линейно независима. От противного, пусть система линейно зависима, тогда существуют одновременно не равные нулю числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, что выполняется равенство

$$\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+\alpha_3\overline{e_3}=\overline{0},$$

$$\alpha_1(1,-2,0)+\alpha_2(0,1,-1)+\alpha_3(3,0,2)=(0,0,0),$$

$$(\alpha_1+3\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_2+2\alpha_3)=(0,0,0),$$

отсюда получаем

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_3=0,\\ -2\alpha_1+\alpha_2=0,\\ -\alpha_2+2\alpha_3=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, что противоречит предположению. Следовательно, система $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ линейно независима, а так как $\dim\mathbb{R}^3=3$, т.е. количество векторов в системе совпадает с размерностью векторного пространства, то эта система образует базис в $\mathbb{R}^3$.

Пусть строка $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ имеет координаты $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$. Тогда

$$a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}=\overline{a},$$

$$a_1(1,-2,0)+a_2(0,1,-1)+a_3(3,0,2)=(5,-5,3),$$

$$(a_1+3a_3,-2a_1+a_2,-a_2+2a_3)=(5,-5,3),$$

$$\begin{cases}a_1+3a_3=5,\\ -2a_1+a_2=-5,\\ -a_2+2a_3=3.\end{cases}$$

Решая систему, находим $a_1=2, a_2=-1, a_3=1$, поэтому $\overline{a}(2,-1,1)$ в базисе $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Доказать, что любая система из $n+1$ вектора в n-мерном векторном пространстве линейно зависима.

3.2. Доказать, что если $\dim V=n$ и $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ – линейно независимая система векторов из пространства V, то она образует базис в V.

3.3. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей. Доказать, что векторы $\overline{e_1}=\overline{AB}$ и $\overline{e_2}=\overline{AD}$ образуют базис векторов плоскости и найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$ в этом базисе.

3.4. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\overline{e_1}=\overline{CB_1}$, $\overline{e_2}=\overline{CO}$. Найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BC}$ в базисе $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$.

3.5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1}=\overline{AB}$, $\overline{e_2}=\overline{AC}$. Найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{BE}$ в базисе $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$.

3.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1} = \overline{A_1C}$, $\overline{e_2} = \overline{D_1B}$, $\overline{e_3} = \overline{C_1B}$. Доказать, что $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ – базис векторов пространства и найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{A_1A}$, $\overline{CB_1}$ в этом базисе.

3.7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AC}$, $\overline{e_3} = \overline{AA_1}$. Найти координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{A_1D}$, $\overline{D_1B}$, $\overline{AC_1}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

3.8. Пусть $\overline{e_1} = (-2,1)$, $\overline{e_2} = (1,-1)$, $\overline{a} = (0,-3)$. Доказать, что строки $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

3.9. Доказать, что система строк $\overline{e_1} = (2,1,-3)$, $\overline{e_2} = (3,2,-5)$, $\overline{e_3} = (1,-1,1)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\overline{a} = (4,-2,1)$ в этом базисе.

4. Скалярное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Какой угол образуют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 1$, а векторы $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} + 3\overline{b}$ ортогональны.

Решение. По условию ортогональности векторов $\overline{c} \perp \overline{d} \Leftrightarrow \overline{c}\overline{d} = 0$, согласно свойствам скалярного произведения будем иметь

$$\left(2\overline{a} - \overline{b}\right)\left(\overline{a} + 3\overline{b}\right) = 2\overline{a}^2 + 5\overline{a}\overline{b} - 3\overline{b}^2 = 2|\overline{a}|^2 + 5\overline{a}\overline{b} - 3|\overline{b}|^2 = 0,$$

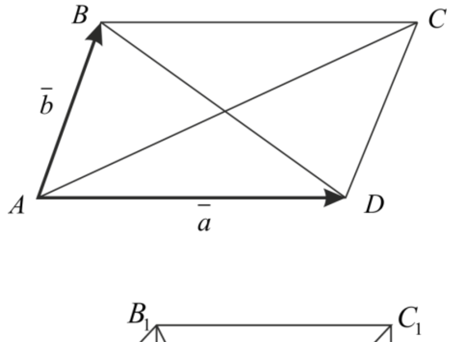
отсюда

$$5\overline{a}\overline{b} = 3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2,$$

$$5|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b}) = 3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2,$$

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2}{5|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{3-4}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}},$$

и, следовательно, $(\overline{a},\overline{b}) = \pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.



Задача 2. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

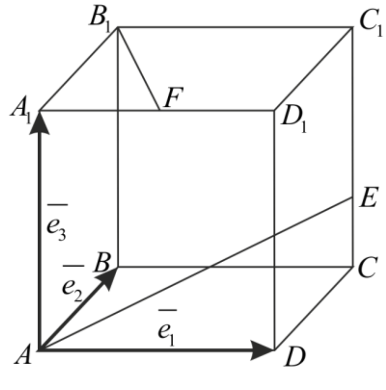
Решение. Обозначим $\overline{a} = \overline{AD}, \overline{b} = \overline{AB}$. Тогда $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{BD} = \overline{a} - \overline{b}$. По свойству скалярного квадрата $\overline{x}^2 = |\overline{x}|^2$, поэтому

$$2AD^2 + 2AB^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2 = 2\overline{a}^2 + 2\overline{b}^2,$$

$$AC^2 + BD^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \left(\overline{a} + \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} - \overline{b}\right)^2 =$$

$$= \overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 + \overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 = 2\overline{a}^2 + 2\overline{b}^2,$$

что и требовалось доказать.



Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F делят ребра CC_1 и A_1D_1 в отношениях 1:2 и 1:1 соответственно. Найти угол между прямыми AE и B_1F.

Решение. Введем ортонормированный базис $\overline{e}_1=\overline{AD}$, $\overline{e}_2=\overline{AB}$, $\overline{e}_3=\overline{AA_1}$. Найдем координаты векторов $\overline{AE}$ и $\overline{B_1F}$ в этом базисе.

$$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AD}+\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{CC_1}=\overline{e}_1+\overline{e}_2+\frac{1}{3}\overline{e}_3,\ \overline{AE}\left(1,1,\frac{1}{3}\right),$$

$$\overline{B_1F}=\overline{B_1A_1}+\overline{A_1F}=-\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_1,\ \overline{B_1F}\left(\frac{1}{2},-1,0\right).$$

По определению скалярного произведения и правилам вычисления скалярного произведения и длины вектора в ортонормированном базисе будем иметь

$$\cos(\overline{AE},\overline{B_1F})=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{B_1F}}{\left|\overline{AE}\right|\left|\overline{B_1F}\right|}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2+(\frac{1}{3})^2}\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{95}}{6}}=\frac{-3}{\sqrt{95}},$$

отсюда $(\overline{AE},\overline{B_1F})=\arccos\frac{-3}{\sqrt{95}}=\pi-\arccos\frac{3}{\sqrt{95}}$, угол между векторами оказался тупым. Угол между прямыми – это наименьший из смежных углов, образованных при их пересечении, поэтому $(AE,B_1F)=\pi-(\overline{AE},\overline{B_1F})=\arccos\frac{3}{\sqrt{95}}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Доказать, что ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны т.и т. т., когда $\overline{a}\overline{b}=0$.

4.2. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{c}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{d}=5\overline{a}-4\overline{b}$ ортогональны.

4.3. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

4.4. Доказать теорему косинусов.

4.5. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ $AB\perp CD$ и $BC\perp AD$, то $AC\perp BD$.

4.6. В треугольнике ABC $AB=7, BC=5, AC=6$. Найти $\overline{BA}\cdot\overline{BC}$.

4.7. В ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ $\overline{e}_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_3\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Проверить, образуют ли $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ ортонормированный базис.

4.8. Найти координаты вектора $\overline{a}$ в ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, если известно, что $\left|\overline{a}\right|=4$ и он образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ углы $60°$ и $45°$.

4.9. Вектор $\overline{a}$ образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ ортонормированного базиса $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ углы $120°$ и $135°$. Какой угол образует $\overline{a}$ с вектором $\overline{k}$?

4.10. Вектор $\overline{a}$ образует с векторами ортонормированного базиса $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ углы α и β и γ. Доказать, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4.11. Найти угол между равными сторонами равнобедренного треугольника, если его медианы, проведенные из концов основания, перпендикулярны.

4.12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – центр грани AA_1B_1B. Найти угол между прямыми DE и BD_1.

4.13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания, точка E – середина ребра SA. Найти угол между прямыми SD и BE.

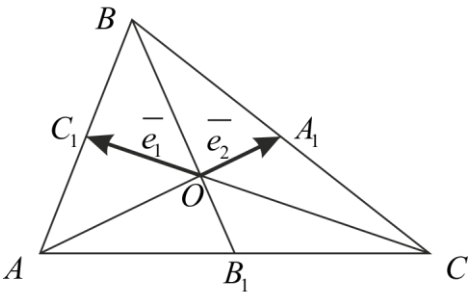
4.14. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Метод координат на плоскости

5. Аффинная система координат на плоскости

Примеры решения задач

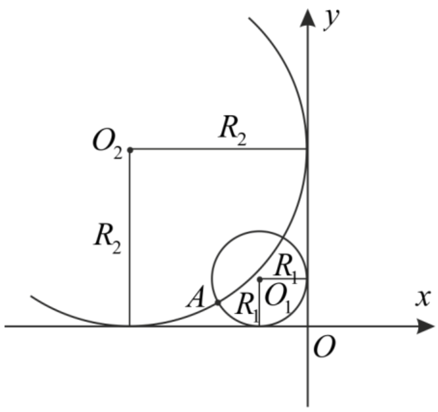
Задача 1. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, $\overline{e_1} = \overline{OC_1}$, $\overline{e_2} = \overline{OA_1}$. Найти координаты вершин треугольника в системе координат $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$.



Решение. Точка A имеет те же координаты, что и ее радиус-вектор $\overline{OA}$. $\overline{OA} = -2\overline{OA_1} = -2\overline{e_2}$, $\overline{OA}(0,-2)$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$, поэтому $A(0,-2)$ в системе координат $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Аналогично $\overline{OC} = -2\overline{OC_1} = -2\overline{e_1}$, $\overline{OC}(-2,0)$, $C(-2,0)$, $\overline{OB} = -2\overline{OB_1} = -2\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right) = -\left(-2\overline{e_2} - 2\overline{e_1}\right) = 2\overline{e_1} + 2\overline{e_2}$, $\overline{OB}(2,2)$, $B(2,2)$.

Задача 2. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(-8,4)$ и касающейся осей декартовой системы координат.

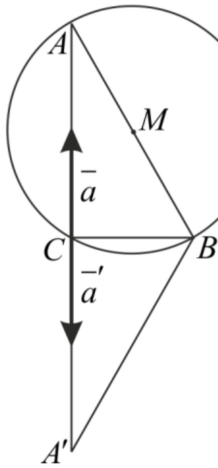


Решение. Искомых окружностей, очевидно, две. Если их радиусы R_1 и R_2, то центры будут иметь координаты $O_1(-R_1, R_1)$, $O_2(-R_2, R_2)$. Расстояния от центров до точки A равны радиусам, поэтому будет верным равенство

$$\sqrt{\left(-R_{1,2}+8\right)^2 + \left(R_{1,2}-4\right)^2} = R_{1,2}.$$

Решая это уравнение, найдем $R_1 = 4, R_2 = 20$, значит, искомые уравнения имеют вид $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$, $(x+20)^2 + (y-20)^2 = 400$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет CA вдвое больше катета CB. Точки B и C заданы своими декартовыми координатами $B(3,-1), C(-1,1)$. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.



Решение. Зададим векторы $\overline{a}$ и $\overline{a}'$, равные по длине вектору $\overline{CB}$ и ортогональные $\overline{CB}$. Так как $\overline{CB}(4,-2)$, то $\overline{a}(2,4)$, $\overline{a}'(-2,-4)$. Задача имеет, очевидно, два решения: в первом случае $\overline{CA} = 2\overline{a}$, во втором $\overline{CA'} = 2\overline{a}'$. Ограничимся первым случаем, во втором решение полностью аналогично. Чтобы найти точку A, необходимо сместить точку C на вектор $\overline{CA} = 2\overline{a}$, $\overline{CA}(4,8)$. Получим $A(-1+4, 1+8)$, $A(3,9)$. Центр описанной окружности – точка M – находится на середине гипотенузы AB, поэтому $M\left(\frac{3+3}{2}, \frac{9-1}{2}\right), M(3,4)$. Радиус окружности равен $MA = \sqrt{(3-3)^2 + (9-4)^2} = 5$. Следовательно, окружность задается урав-

уравнением $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Дана аффинная система координат на плоскости. Построить точки $A(1,0),\ B(-2,0),\ C(-3,1)$ по их координатам в этой системе координат.

5.2. Даны вершины $A(-1,3),\ B(2,-5),\ C(0,4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

5.3. Найти координаты точки A', симметричной точке $A(-1,5)$ относительно точки $B(3,2)$.

5.4. Даны координаты середин сторон треугольника ABC $A_1(2,4), B_1(-3,0), C_1(2,1)$. Найти координаты вершин треугольника ABC.

5.5. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если $A(a_1,a_2),\ B(b_1,b_2),\ C(c_1,c_2)$.

5.6. По данным точкам A и B построить такую точку C, что $(ABC)=-\frac{2}{3}$.

5.7. Пусть в некоторой аффинной системе координат $A(2,3), B(-1,2)$. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $3:5$.

5.8. В некоторой аффинной системе координат $A(1,1), B(2,3), C(5,0), D(7,-5)$. Проверить, является ли $ABCD$ трапецией.

5.9. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-4,4), B(2,0)$ и точка пересечения диагоналей $O(2,2)$. Найти координаты двух других вершин.

5.10. Известны аффинные координаты точек $A(-1,7), B(5,5), C(7,-5), D(3,-7)$. Проверить, что четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$, есть параллелограмм.

5.11. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1}=\overline{BC}$, $\overline{e_2}=\overline{BD}$. Найти координаты вершин шестиугольника в системе координат $B,\overline{e_1},\overline{e_2}$.

5.12. Даны вершины $A(3,-1)$ и $B(1,4)$ треугольника ABC и точка пересечения медиан $K(0,2)$. Найти координаты третьей вершины.

5.13. Даны декартовы координаты вершин $A(5,-4),\ B(-1,2),\ C(5,1)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

5.14. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $B(10,9)$ и касающейся оси Ox декартовой системы координат Oxy в точке $A(7,0)$.

5.15. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(-8,4)$ и касающейся осей декартовой системы координат.

5.16. Известны декартовы координаты смежных вершин $A(-2,1)$ и $B(3,3)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты двух других вершин.

5.17. Даны декартовы координаты вершин $A(-3,2)$ и $B(1,4)$ правильного треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

5.18. Найти точку на расстоянии $\sqrt{50}$ от начала декартовой системы координат и равноудаленную от точек $A(2,3)$ и $B(5,6)$.

6. Формулы преобразования координат векторов и точек плоскости

Примеры решения задач

Задача 1. Даны базисы $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) и $\overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2), причем $\overline{e_1}'(2,-1), \overline{e_2}'(-3,1)$ в базисе (1).

а) Записать формулы преобразования координат векторов плоскости при переходе от (1) к (2) и наоборот.

б) Найти координаты старых векторов в новом базисе.

в) Найти старые координаты вектора $\overline{a}$ и новые координаты вектора $\overline{b}$, если $\overline{a}(5,-2)$ в базисе (2), $\overline{b}(-3,4)$ в базисе (1).

Решение. а) Матрица перехода от старого базиса к новому будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

в соответствии с ней запишем формулы преобразования координат векторов

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - 3x_2', \\ x_2 = -x_1' + x_2'. \end{cases} \quad (3)$$

Решая эту систему относительно x_1', x_1', найдем формулы преобразования координат векторов при переходе от нового базиса к старому

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2, \\ x_2' = -x_1 - 2x_2. \end{cases} \quad (4)$$

б) На основании формул (4) заключаем, что $\overline{e_1}(-1,-1), \overline{e_2}(-3,-2)$ в базисе (2).

в) Найдем старые координаты вектора $\overline{a}$ с помощью формул (3)

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2, \\ x_2 = -4 + 2, \end{cases}$$

отсюда $\overline{a}(2,-2)$ в базисе (1). Для нахождения новых координат вектора $\overline{b}$ воспользуемся формулами (4)

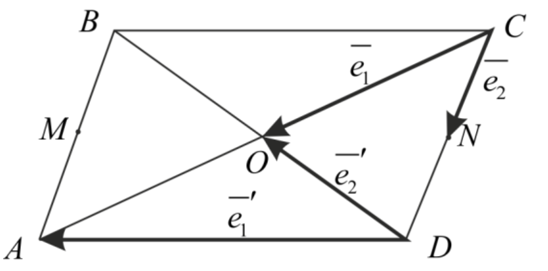
$$\begin{cases} x_1' = -(-5) - 3 \cdot 1, \\ x_2' = -(-5) - 2 \cdot 1, \end{cases}$$

$\overline{b}(2,3)$ в базисе (2).

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, $\overline{e_1} = \overline{CO}$, $\overline{e_2} = \overline{CN}$, $\overline{e_1}' = \overline{DA}$, $\overline{e_2}' = \overline{DO}$.

а) Записать формулы преобразования координат точек при переходе от репера $C, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ к реперу $D, \overline{e_1}', \overline{e_2}'$.

б) Найти новые координаты точки M, а затем с помощью формул перехода – старые координаты этой точки.



Решение. а) Пусть $C, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) – старая система координат, $D, \overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2) – новая система координат. Найдем координаты новых базисных векторов и начала новой системы координат в старой системе координат.

$\overline{e_1}' = \overline{CA} - \overline{CD} = 2\overline{e_1} - 2\overline{e_2}$, $\overline{e_1}'(2,-2)$ в с.к. (1).

$\overline{e_2}' = \overline{CO} - \overline{CD} = \overline{e_1} - 2\overline{e_2},\ \overline{e_1}'(1,-2)$ в с.к. (1). Матрица перехода будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения старых координат начала новой с. к. найдем ее радиус-вектор $\overline{CD} = 2\overline{e_2},\ \overline{CD}(0,2)$ в с.к. (1). Значит, $D(0,2)$ в с.к. (1).

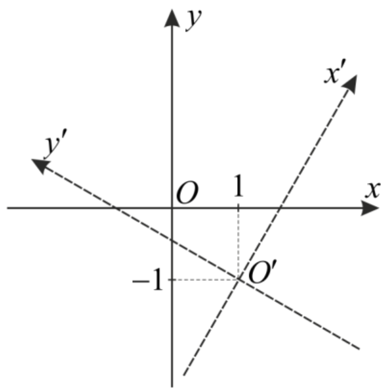
Запишем формулы преобразования координат точек при переходе от репера (1) к реперу (2)

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' + x_2', \\ x_2 = -2x_1' - 2x_2' + 2. \end{cases}$$

б) Для нахождения новых координат точки M найдем ее радиус-вектор $\overline{DM} = \overline{DO} + \overline{OM} = \overline{DO} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \overline{e_2}' + \frac{1}{2}\overline{e_1}',\ \overline{DM}\left(\frac{1}{2},1\right),\ M\left(\frac{1}{2},1\right)$ в с.к. (2). Старые координаты точки M найдем с помощью формул перехода

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot\frac{1}{2} + 1, \\ x_2 = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 + 2, \end{cases}$$

$M(2,-1)$ в с.к. (1).



Задача 3. Новая система координат получена из декартовой системы координат переносом начала координат в точку $O'(1,-1)$ и поворотом на угол $60°$. Известно уравнение кривой $\gamma: -\sqrt{3}x^2 - 2xy + \sqrt{3}y^2 + 2(\sqrt{3}-1)x + 2(\sqrt{3}+1)y - 2 = 0$ в исходных координатах. Найти уравнение γ в новом репере.

Решение. Запишем формулы перехода от старого репера к новому

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1. \end{cases}$$

Заменяя x и y в уравнении γ с помощью формул перехода, получим уравнение γ в новом репере

$$-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right)y + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right)^2 +$$

$$+2(\sqrt{3}-1)\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right) + 2(\sqrt{3}+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right) - 2 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим после некоторых подсчетов $\gamma: x'y' = 1$ или $\gamma: y' = \frac{1}{x'}$. Таким образом, γ – гипербола.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Записать формулы преобразования координат векторов плоскости, если даны старые координаты новых базисных векторов

а) $\overline{e_1}'(2,-1),\ \overline{e_2}'(3,7)$; б) $\overline{e_1}'(0,-2),\ \overline{e_2}'(3,0)$.

6.2. Пусть $\overline{e_1},\overline{e_2}$ и $\overline{e_1}',\overline{e_2}'$ – два базиса векторов плоскости, для которых формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2', \\ x_2 = -5x_1' + 3x_2'. \end{cases}$$

Найти координаты $\overline{e_1}'$ и $\overline{e_2}'$ в базисе $\overline{e_1},\overline{e_2}$.

6.3. Пусть старые и новые координаты векторов плоскости связаны формулами

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - 3x_2', \\ x_2 = x_1' + 5x_2'. \end{cases}$$

Найти

а) старые координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известны их новые координаты $\overline{a}(5,-2)$, $\overline{b}(-3,4)$;

б) новые координаты векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$, если известны их старые координаты $\overline{c}(2,1)$, $\overline{d}(1,1)$.

6.4. Пусть старые координаты векторов выражаются через их новые координаты по формулам

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' + 5x_2', \\ x_2 = x_1' + 3x_2'. \end{cases}$$

Найти формулы, по которым новые координаты выражаются через старые.

6.5. Пусть в старом базисе $\overline{a}(4,5)$, $\overline{b}(0,3)$, а в новом базисе $\overline{a}(3,-1)$, $\overline{b}(1,1)$. Записать формулы преобразования координат векторов.

6.6. Записать формулы преобразования координат точек плоскости, если даны старые координаты новых базисных векторов $\overline{e_1}'(4,3),\ \overline{e_2}'(0,5)$ и нового начала координат $O(3,-2)$. Найти старые координаты точки M, если известны ее новые координаты $M(2,-3)$. Найти новые координаты точки N, если известны ее старые координаты $N(0,-1)$.

6.7. Найти точку M, имеющие одни и те же координаты в реперах $O,\overline{e_1},\overline{e_2}$ (1) и $O',\overline{e_1}',\overline{e_2}'$ (2), если $\overline{e_1}'(1,3),\ \overline{e_2}'(-2,1),\ O'(2,-3)$ в репере (1).

6.8. В старой системе координат $A(1,1),\ B(5,6),\ C(1,4)$, в новой системе координат $A(0,1),\ B(3,0),\ C(1,2)$. Записать формулы преобразования координат.

6.9. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, M – середина OC. Записать формулы преобразования координат точек при переходе от репера $A,\overline{AB},\overline{AC}$ к реперу $O,\overline{OB},\overline{OC}$. Найти старые и новые координаты точки M, выполнить проверку с помощью формул перехода.

6.10. Центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ находится в точке O, $\overline{e_1} = \overline{FB},\ \overline{e_2} = \overline{FO}$, $\overline{e_1}' = \overline{CB},\ \overline{e_2}' = \overline{CD}$. Записать формулы преобразования координат векторов и точек плоскости, полагая, что начала старого и нового реперов находятся в точках F и C.

6.11. Пусть в декартовой системе координат Oxy кривая γ задается уравнением $y^2 = 4x$. Записать уравнение γ в новой системе координат, которая получена из старой переносом начала координат в точку $O'(1,0)$.

6.12. Новая система координат получена из декартовой системы координат поворотом на угол α. Известно уравнение кривой γ в исходных координатах. Найти ее уравнение в новом репере, если

а) $\gamma: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0,\ \alpha = 45°$; б) $\gamma: x^2 - y^2 = a^2,\ \alpha = -45°$.

6.13. Новая декартова система координат получена из старой переносом начала координат в точку $O'(1,-3)$ и поворотом на такой угол α, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$. В новых координатах $A(3,1),\ B(1,2),\ C(-3,4)$. Найти старые координаты этих точек.

6.14. Известны декартовы координаты точек $A(-2,5),\ B(-6,1),\ C(0,3)$. Найти их координаты в новой системе координат, если оси повернуты на угол $\alpha = 45°$, а начало координат перенесено в точку $O'(-2,3)$.

Прямая на координатной плоскости

7. Уравнение прямой в аффинной системе координат

Примеры решения задач

Задача 1. В некоторой аффинной системе координат точки A и B имеют координаты $A(-2,4)$ и $B(1,-1)$.

а) Составить каноническое и общее уравнение прямой AB, найти ее параметрическое представление.

б) Лежат ли на этой прямой точки $C(4,-6)$ и $D(0,2)$?

в) Указать еще какие-нибудь точки этой прямой.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}(3,-5)$ будет направляющим вектором прямой AB. Составим каноническое уравнение прямой по точке $B(1,-1)$ и направляющему вектору $\overline{AB}$

$$AB: B, \overline{AB},\ \ AB: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-5}.$$

Из канонического уравнения легко получить общее уравнение

$$AB: -5(x-1) = 3(y+1),$$

$$AB: 5x + 3y - 2 = 0.$$

Параметрическое представление будет иметь вид

$$AB: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 - 5t. \end{cases}$$

б) Подставим координаты точки C в общее уравнение прямой, получим верное равенство $5 \cdot 4 + 3(-6) - 2 = 0$, поэтому точка C лежит на прямой AB. Так как $5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 2 \neq 0$, то точка D не лежит на AB.

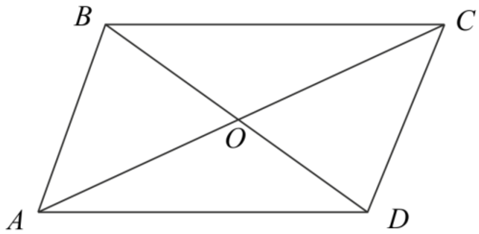
в) Необходимо подобрать такие координаты, которые бы удовлетворяли уравнению прямой AB. Удобнее всего это делать с помощью параметрического представления.

Возьмем, например, $t=2$, получим $x=1+3\cdot 2=7$, $y=-1-5\cdot 2=-11$, т.е. точка с координатами $(7,-11)$ лежит на AB. При $t=-3$ получим точку с координатами $(-8,14)$.

Задача 2. Даны уравнения $AD: x-2y-3=0$, $CD: 2x-y=0$ двух смежных сторон параллелограмма $ABCD$ и координаты точки пересечения его диагоналей $O(2,-3)$. Составить уравнения сторон AB и BC.

Решение. Так как $D=AD\cap CD$, составляя систему из уравнений прямых AD и CD и решая ее, найдем координаты точки D

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}.$$



Т. о., $D(-1,-2)$. Точку B можно найти смещением точки O на вектор $\overline{OB}$. Но $\overline{OB}=\overline{DO}$, $\overline{DO}(3,-1)$, поэтому $O(2+3,-3+(-1))$, $O(5,-4)$. Из уравнения прямой AD найдем ее направляющий вектор $\overline{a_1}(2,1)$, он будет направляющим и для прямой BC, поскольку $AD\,||\,BC$. Зададим каноническое уравнение прямой BC по точке B и направляющему вектору $\overline{a_1}$

$$BC: B,\overline{a_1},\quad BC: \frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{1},\quad BC: x-2y-13=0.$$

Аналогично зададим уравнение прямой AB по точке B и направляющему вектору $\overline{a_2}(1,2)$ прямой CD

$$AB: B,\overline{a_2},\quad AB: \frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{2},\quad AB: 2x-y-14=0.$$

Задача 3. Прямая $l_1: x-2y-6=0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B соответственно. Определить, какие стороны треугольника AOB пересекает прямая $l_2: 2x+3y-4=0$.

Решение. Координаты точек A и B удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x-2y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} x-2y-6=0 \\ x=0 \end{cases}$$

соответственно, отсюда находим $A(6,0)$, $B(0,-3)$. Выясним, как расположены точки O, A, B относительно прямой l_2. Для этого найдем числа $\alpha_O=2\cdot 0+3\cdot 0-4=-4<0$, $\alpha_A=6\cdot 0+3\cdot 0-4=2>0$, $\alpha_B=2\cdot 0+3\cdot(-3)-4=-13<0$. Следовательно, точки O и B лежат в одной полуплоскости относительно l_2, а точка A – в другой полуплоскости, поэтому прямая l_2 пересекает стороны OA и AB.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Лежат ли точки $A(-1,2)$ и $B(4,0)$ на прямой $l: x+2y-3=0$? Найти еще какую-нибудь точку этой прямой.

7.2. Найти точки пересечения прямой $l: 3x-2y-6=0$ с координатными осями.

7.3. Для прямой $l: M(-2,3)$, $\overline{a}(2,-1)$ найти

а) параметрическое представление;
б) каноническое уравнение;
в) общее уравнение.

7.4. Составить общее уравнение прямой $l: x=-2+3t,\ y=4-t$.

7.5. Составить общее уравнение прямой AB, если $A(0,-2),\ B(3,-4)$.

7.6. Найти параметрическое представление прямой $l: 4x-2y-1=0$.

7.7. Даны координаты середин сторон треугольника ABC $A_1(2,4), B_1(-3,0), C_1(2,1)$. Составить уравнения сторон треугольника.

7.8. Даны уравнения $l_1: x-y-1=0,\ l_2: x-2y=0$ двух смежных сторон параллелограмма и координаты точки пересечения его диагоналей $K(3,-1)$. Составить уравнения двух других сторон.

7.9. Через точку $M(2,-5)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок между прямыми $x-y-1=0$ и $2x-y-18=0$ делился точкой M пополам.

7.10. Через точку $M(2,-1)$ провести прямую, отрезок которой между осями координат делится точкой M пополам.

7.11. Даны уравнения $x+2y-3=0,\ x+y-2=0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x+6y-15=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

7.12. При каких значениях параметра α прямые $3\alpha x-8y+1=0$ и $(1+\alpha)x-2\alpha y=0$ параллельны.

7.13. Можно ли подобрать коэффициенты α и β, чтобы прямые $3x-2y+1=0$ и $\alpha x+\beta y-3=0$ совпадали?

7.14. Даны вершины $A(-6,3),\ B(8,10),\ C(2,-6)$ треугольника ABC и прямая $l: 2x-3y+6=0$. Определить, какие стороны треугольника пересекает прямая.

7.15. Записать аналитические условия, задающие полосу между прямыми $3x+y-1=0$ и $6x+2y+3=0$.

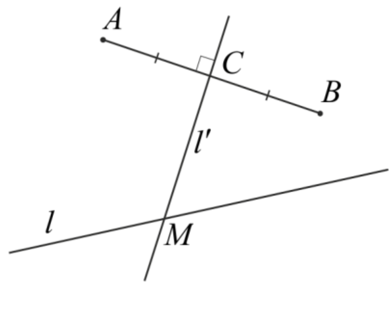
7.16. Доказать, что прямая $5x-y-5=0$ пересекает отрезок прямой $3x-2y-6=0$, заключенный между осями координат.

7.17. Выяснить, является ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым, если $A(2,1),\ B(-3,0)$, $C(4,-2),\ B(-1,-1)$.

8. Уравнение прямой в декартовой системе координат

Примеры решения задач

Задача 1. На прямой $l: x+4y-3=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-1,3)$ и $B(3,1)$.



Решение. Множество точек, равноудаленных от точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB, обозначим его l'. Поэтому искомая точка M находится на пересечении l и l'. Пусть C – середина отрезка AB, тогда $C\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, $C(1,2)$. Зададим уравнение l' по точке C и нормальному вектору $\overline{CB}(2,-1)$

$$l': C, \overline{CB}(\text{норм.в.}),\quad l': 2(x-1)+(-1)(y-2)=0,\quad l': 2x-y=0.$$

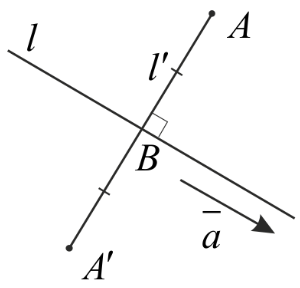
Координаты точки M найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} x+4y-3=0, \\ 2x-y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Получили $M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Задача 2. Найти точку, симметричную точке $A(-2,1)$ относительно прямой $l: 3x-2y-18=0$.

Решение. Вектор $\overline{a}(2,3)$ является направляющим вектором прямой l, а для перпендикуляра l', проведенного из точки A к прямой l, $\overline{a}$ – вектор нормали. Зададим уравнение l' по точке A и вектору нормали $\overline{a}$, $l': 2(x+2)+3(y-1)=0,\ l': 2x+3y+1=0$. Решая систему

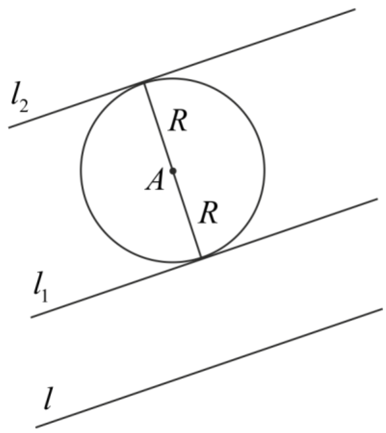


$$\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ 3x-2y-18=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-3, \end{cases}$$

найдем координаты точки $B(4,-3)$ – основания перпендикуляра. Поскольку $AB=BA'$, найдем искомую точку A' смещением точки B на вектор $\overline{AB}(6,-4)$. Получим $A'(10,-7)$.

Задача 3. К окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=17$ провести касательные, параллельные прямой $l: 4x-y+1=0$.

Решение. Уравнения искомых касательных l_1 и l_2 отличаются от уравнения l лишь свободным членом, т.е. имеют вид $l_{1,2}: 4x-y+D_{1,2}=0$. Расстояние от центра окружности $A(3,-2)$ до l_1 и l_2 равно радиусу, поэтому, воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой, получим уравнение



$$\rho\left(A,l_{1,2}\right)=\frac{\left|4\cdot 3-(-2)+D_{1,2}\right|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17},$$

$$\left|14+D_{1,2}\right|=17,$$

отсюда $D_1=-31,\ D_2=3$, а искомые уравнения имеют вид $l_1: 4x-y-31=0$, $l_2: 4x-y+3=0$.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. В треугольнике ABC $A(-1,5)$, $B(3,2)$, $H(5,-3)$ – точка пересечения высот. Составить уравнение стороны AC.

8.2. Точка $H(-3,2)$ – точка пересечения высот треугольника ABC, в котором $AB: 2x-y=0$, $BC: x+y-3=0$. Составить уравнение стороны AC.

8.3. Составить уравнение касательной, проведенной к окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ через точку $A(2,6)$ этой окружности.

8.4. На прямой $l: x+2y-1=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-2,5)$ и $B(0,1)$.

8.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,5)$ и равноудаленную от точек $B(3,7)$ и $C(1,-1)$.

8.6. Найти точку, симметричную точке $A(2,-5)$ относительно прямой $l: 2x+8y-15=0$.

8.7. Найти координаты точки A, лежащей на прямой $x+y+8=0$ и равноудаленной от точки $B(2,8)$ и прямой $x-3y+2=0$.

8.8. Луч света направлен по прямой $l_1: x+y+3=0$ и отражается от прямой $l_2: 3x-y+5=0$. Составить уравнение прямой, содержащей отраженный луч.

8.9. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $l_1: x-2y+2=0$ относительно прямой $l_2: 3x+y-1=0$.

8.10. Найти угол между прямыми

а) $2x+y+1=0$ и $y-x-2=0$;

б) $x=4$ и $2x-y-1=0$;

в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-4}$ и $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}$;

г) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}$ и $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{-4}$.

8.11. Найти длину высоты AH треугольника ABC, если $A(-1,2)$, $B(0,1)$, $C(-1,-3)$.

8.12. К окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=100$ провести касательные, параллельные прямой $l: 3x+4y+1=0$.

8.13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(-1,4)$ и касается окружности $(x+2)^2+(y+1)^2=25$.

8.14. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $M(-1,3)$ и касающейся прямых $7x+y=0$ и $x-y+8=0$.

8.15. Доказать, что расстояние между прямыми $l_1: Ax+By+C_1=0$ и $l_2: Ax+By+C_2=0$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

8.16. Составить уравнения сторон прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла $C(-3,4)$ и серединой гипотенузы $M(1,2)$, если известно, что точка $N(-3,3)$ лежит на гипотенузе.

8.17. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: x-7y-1=0$ и $l_2: x+y+7=0$.

8.18. В треугольнике ABC $A(20,15)$, $B(-16,0)$, $C(-8,-6)$. Составить уравнения вписанной и описанной окружностей.

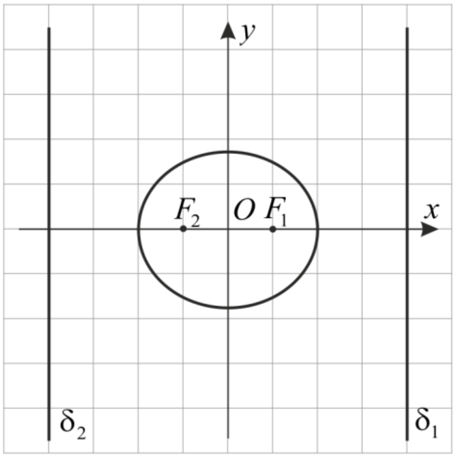
Линии второго порядка

9. Конические сечения

Примеры решения задач

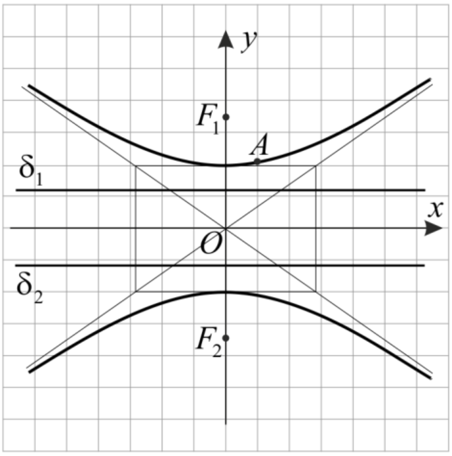
Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами 2, а между директрисами 8. Изобразить эллипс, его фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.

Решение. Зная расстояние между фокусами, найдем их координаты $F_1(1,0)$, $F_2(-1,0)$, отсюда $c=1$. Аналогично найдем $x_\delta=4$, поэтому из равенства $x_\delta=\frac{a^2}{c}$, $4=\frac{a^2}{1}$ получим, что $a=2$. Далее находим $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



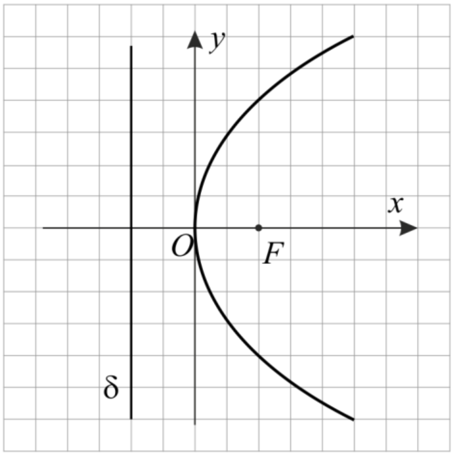
Задача 2. Составить уравнение гиперболы, если точка $A\left(1,\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ лежит на гиперболе, а асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$. Изобразить гиперболу, ее фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.

Решение. Изобразив асимптоты и точку A, замечаем, что у данной гиперболы действительной осью будет ось Oy. Асимптоты гиперболы задаются уравнением $y=\pm\frac{b}{a}x$, поэтому $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=\sqrt{2}b$, следовательно, гипербола задается уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{2b^2}=1$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A\left(1,\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $\frac{9}{2b^2}-\frac{1}{2b^2}=1$, отсюда $b=2,\ a=2\sqrt{2},\ c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$. Так как у гиперболы действительной осью является Oy, эксцентриситет и пересечение директрисы с координатной осью найдем из формул $\varepsilon=\frac{c}{b}=\sqrt{3},\ y_\delta=\frac{b^2}{c}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Задача 3. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно 4. Изобразить параболу, ее фокус, директрису.

Решение. Расстояние от фокуса до директрисы равно фокальному параметру параболы, поэтому $p=4$, а уравнение параболы имеет вид $y^2=8x$. Фокус находится в точке с координатами $\left(\frac{p}{2},0\right)$, отсюда $F(2,0)$. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$, $x=-2$.



Задачи для самостоятельного решения

9.1. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой сумма расстояний до точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равна 10.

9.2. Изобразить эллипс, его фокусы, директрисы

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $x^2+2y^2=1$; в) $8x^2+3y^2-24=0$.

9.3. Отрезок неизменной длины скользит концами по сторонам прямого угла. Точка M делит отрезок на части длины a и b. Какая траектория точки M ?

9.4. Дан основной прямоугольник эллипса. Как с помощью циркуля и линейки построить фокусы эллипса?

9.5. Орбита Земли – эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Большая полуось эллипса составляет 150 млн. км, эксцентриситет равен 0,017. Найти разность между наибольшим и наименьшим расстояниями от Земли до Солнца.

9.6. Определить эксцентриситет искусственного спутника Земли, если его максимальное расстояние от Земли равно 947 км, минимальное – 228 км. Радиус Земли принять за 6371 км.

9.7. Найти точки на эллипсе $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 14.

9.8. Составить каноническое уравнение эллипса, если

а) расстояние между директрисами равно 12, а большая полуось равна $2\sqrt{3}$;

б) точки $A(2,2)$ и $B(3,1)$ лежат на эллипсе;

в) расстояние от его точки $A(8,12)$ до левого фокуса равно 20;

г) точка $A\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу, а фокусы находятся в точках $(\pm 1,0)$;

д) фокусы находятся в точках $(\pm 2,0)$, а директрисы имеют уравнения $x=\pm 18$;

е) хорда, соединяющая две соседние вершины, имеет длину 5 и наклонена к большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

ж) директрисы имеют уравнения $x=\pm 18$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат.

9.9. Определить эксцентриситет эллипса, если

а) его малая ось видна из фокусов под углом $60°$;

б) расстояние между директрисами втрое больше расстояния между фокусами.

9.10. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой модуль разности расстояний до точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равен 6.

9.11. Изобразить гиперболу, ее фокусы, директрисы

а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $4x^2-y^2=1$; в) $8x^2-4y^2+16=0$.

9.12. Даны вершины гиперболы и ее основной прямоугольник. Как с помощью циркуля и линейки построить фокусы гиперболы?

9.13. Доказать, что отрезок асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, расположенный между центром гиперболы и директрисой, имеет длину a.

9.14. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту.

9.15. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.

9.16. Доказать, что расстояние от фокусов гиперболы до ее асимптот равно $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9.17. Составить уравнение гиперболы, если

а) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, а эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$;

б) точка $A(1,2)$ лежит на гиперболе, а асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{1}{2}x$;

в) точка $A(1,3)$ лежит на гиперболе, а длина действительной оси равна 1;

г) точка $A(-9,4)$ лежит на гиперболе, а директрисы имеют уравнения $x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$;

д) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит отрезок между фокусами в отношении 4:1;

е) $\varepsilon=\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

9.18. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между ее вершинами виден из фокусов сопряженной гиперболы под углом $60°$.

9.19. Изобразить параболу, ее фокус, директрису

а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -2x$; в) $x^2 = -4y$; г) $3y^2 + 16x = 0$

9.20. Брошенный камень, двигаясь по параболе, достиг максимальной высоты 6 м и упал на расстоянии 24 м от начального положения. Определить фокальный параметр параболы.

9.21. Найти наименьшее расстояние от параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.

9.22. Составить каноническое уравнение параболы, если

а) точка $A(5,-5)$ принадлежит параболе;

б) расстояние от фокуса до директрисы равно 12.

9.23. Как с помощью циркуля и линейки строить точки параболы, если известны ее фокус и директриса?

10. Кривые второго порядка и их классификация

Примеры решения задач

Задача 1. Изобразить кривую второго порядка, задающуюся в декартовой системе координат Oxy уравнением

$$\gamma: 9x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

Решение. В этом уравнении $A = 9,\ B = 4,\ C = 6$.

1. Поворачиваем систему координат вокруг начала координат на такой острый угол α, чтобы в новой системе координат $O'x'y'$ в уравнении отсутствовало слагаемое $B'x'y'$. Угол поворота определяется формулой

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{B}.$$

В нашем случае $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{9-6}{4} = \frac{3}{4}$. Чтобы воспользоваться формулами поворота системы координат, необходимо найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для этого сначала находим

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{5},$$

а затем

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Формулы поворота системы координат на угол α будут иметь вид

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулами, найдем уравнение γ в новой системе координат $O'x'y'$

$$\gamma: 9\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 +$$

$$+2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 4 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$\gamma: 10x'^2 + 5y'^2 - 2\sqrt{5}y' - 4 = 0.$$

2. Видим, что переменная y' входит в уравнение γ и в первой, и во второй степени, поэтому выделим при y' полный квадрат

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 4 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) - 4 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5,$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{1} = 1.$$

Введем систему координат $O''x''y''$ с помощью формул преобразования координат

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

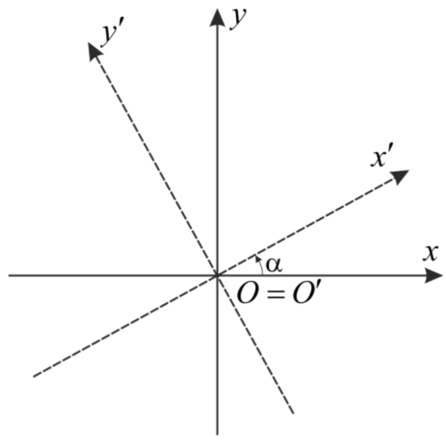
Эти формулы определяют перенос системы координат $O'x'y'$ на вектор $\bar{a}\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

В системе координат $O''x''y''$ кривая γ имеет уравнение

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

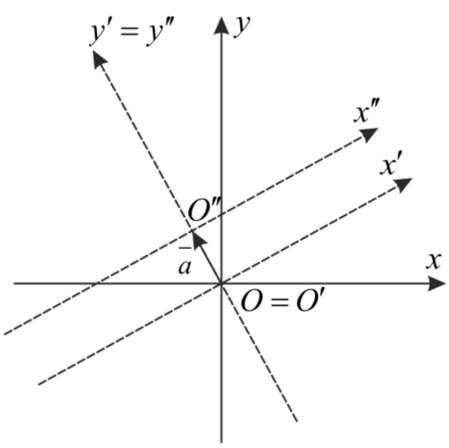
3. Видим, что γ – эллипс с полуосями $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $b = 1$. Изобразим его.

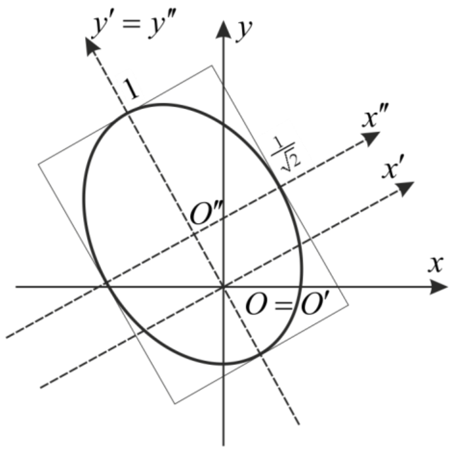
Повернем систему координат Oxy на вектор $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.



Перенесем систему координат $O'x'y'$ на вектор $\bar{a}\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

В системе координат $O''x''y''$ изображаем эллипс $\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{1} = 1.$





Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах необходимо изобразить кривые второго порядка, приведя уравнение к каноническому виду.

10.1. $x^2+2y^2-4x+4-10=0$;

10.2. $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;

10.3. $3y^2-12x-6y+11=0$;

10.4. $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;

10.5. $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$;

10.6. $3x^2+12x+16y-12=0$;

10.7. $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$;

10.8. $x^2+x-6=0$;

10.9. $2x^2+6xy+10y^2-121=0$;

10.10. $9xy+4=0$;

10.11. $2x^2-2\sqrt{3}xy+9=0$;

10.12. $18x^2+24xy+11y^2-3=0$;

10.13. $x^2+xy+y^2-121=0$;

10.14. $2x^2-4xy+5y^2+8x-2y+9=0$;

10.15. $4xy-3y^2-4x+10y-6=0$;

10.16. $9x^2-24xy+16y^2-8x+19y+4=0$;

10.17. $x^2-xy+y^2+x+y=0$;

10.18. $xy+2x+y=0$.

РАЗДЕЛ II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

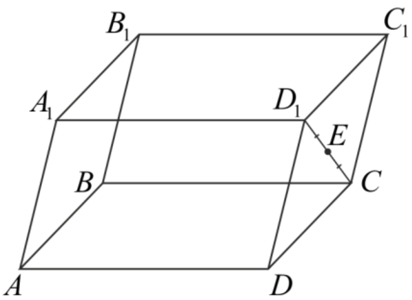
Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов

11. Аффинная и декартова системы координат в пространстве

Примеры решения задач

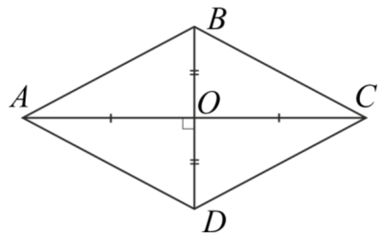
Задача 1. Даны координаты вершин $A(2,0,1)$, $B(1,3,-1)$, $B_1(3,-1,0)$, $D_1(-2,2,1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты центра грани CC_1D_1D.

Решение. Искомая точка E является серединой отрезка CD_1, поэтому найдем сначала координаты точки C. Для этого сместим точку B на вектор $\overline{BC}$. $\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{B_1D_1}$, но $\overline{AB}(-1,3,-2)$, $\overline{B_1D_1}(-5,3,1)$, поэтому $\overline{BC}(-1+(-5),3+3,-2+1)$, $\overline{BC}(-6,6,-1)$ следовательно, $C(1+(-6),3+6,-1+(-1))$, $C(-5,9,-2)$, $E\left(\frac{-5+2}{2},\frac{9+2}{2},\frac{-2+1}{2}\right)$, $E\left(-\frac{3}{2},\frac{11}{2},-\frac{1}{2}\right)$.



Задача 2. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(1,2,4)$, $B(2,1,1)$, $C(3,-2,0)$, $D(2,-1,3)$ – ромб и найти его площадь. Система координат – декартова.

Решение. Достаточно показать, что диагонали четырехугольника перпендикулярны и их середины совпадают. Проверим ортогональность векторов $\overline{AC}(2,-4,-4)$ и $\overline{BD}(0,-2,2)$ с помощью скалярного произведения $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=2\cdot 0+(-4)\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=0$ – условие ортогональности выполнено. Пусть O – середина AC, тогда $O(2,0,2)$. Легко проверить, что середина BD имеет такие же координаты. Таким образом, $ABCD$ – ромб, поэтому его площадь вычислим по формуле $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{0+4+4}=6\sqrt{2}$.



Задачи для самостоятельного решения

11.1. Даны координаты вершин $A(2,-1,1)$, $B(1,3,4)$, $A_1(4,2,0)$, $D(6,0,1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты остальных вершин.

11.2. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(0,2,-3)$, $B(1,-1,2)$, $C(-2,-1,0)$, $D(-3,2,-5)$ – параллелограмм.

11.3. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через одну точку и делятся ею пополам.

11.4. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(3,5,-4)$, $B(-1,1,2)$, $C(-5,-5,-2)$ является равнобедренным. Система координат – декартова.

11.5. Даны вершины $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-6)$, $C(-5,0,2)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины A. Система координат – декартова.

11.6. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(7,2,4)$, $B(4,-4,2)$, $C(6,-7,8)$, $D(9,-1,10)$ – квадрат. Система координат – декартова.

11.7. Найти углы треугольника с вершинами в точках $A(2,-1,0)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,0,2)$. Система координат – декартова.

11.8. AD – биссектриса треугольника с вершинами в точках $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Найти координаты точки D и длину AD. Система координат – декартова.

12. Векторное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные ортогональные векторы. Найти $\left|\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\right|$.

Решение. По свойствам векторного произведения

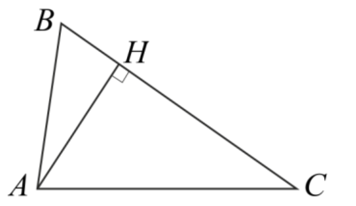
$$\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=2\overline{a}\times\overline{a}+2\overline{a}\times\overline{b}-3\overline{b}\times\overline{a}-3\overline{b}\times\overline{b}=$$

$$=2\cdot\overline{0}+2\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{a}\times\overline{b}-3\cdot\overline{0}=5\overline{a}\times\overline{b},$$

поэтому

$$\left|\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\right|=\left|5\overline{a}\times\overline{b}\right|=5\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=5\,|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin 90^\circ=5.$$

Задача 2. Найти высоту AH треугольника ABC, если $A(-3,1,0)$, $B(-1,0,0)$, $C(1,1,-2)$.



Решение. Найдем высоту из равенства

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{BC} = \frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{BC}.$$

$BC = \sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2+(-2-0)^2} = 3$. $\overline{AB}(2,-1,0)$, $\overline{AC}(4,0,-2)$, поэтому

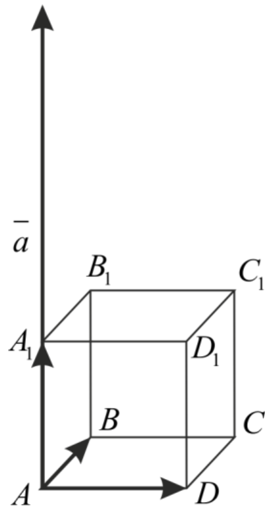
$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\bar{k} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6,$$

отсюда $AH = \frac{6}{3} = 2.$

Задача 3. Известны координаты вершин $A(1,-2,3)$, $B(3,-3,5)$, $D(-1,-4,4)$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты вершины A_1.

Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{AD}\times\overline{AB}$. По определению векторного произведения вектор $\bar{a}$ ортогонален $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, образует с ними правый базис. То же самое можно сказать и о векторе $\overline{AA_1}$, поэтому $\bar{a}$ и $\overline{AA_1}$ сонаправлены. $\overline{AD}(-2,-2,1)$, $\overline{AB}(2,-1,2)$, $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right| = 3$, поэтому $\left|\overline{AA_1}\right| = 3$, $\left|\bar{a}\right| = \left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|\sin\left(\overline{AD},\overline{AB}\right) = 9$ и, следовательно, $\overline{AA_1} = \frac{1}{3}\bar{a}$.



$$\bar{a} = \overline{AD}\times\overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k},$$

отсюда $\overline{AA_1}(-1,2,2)$. Смещая точку A на вектор $\overline{AA_1}$, получим $A_1(0,0,5)$.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Доказать, что $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\parallel\bar{b}$.

12.2. Как связаны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если при некотором $\bar{c}\neq\bar{0}$ имеет место равенство $\bar{a}\times\bar{c} = \bar{b}\times\bar{c}$.

12.3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} + 3\bar{b}$ были коллинеарны.

12.4. Известно, что $|\bar{a}| = 10,\ |\bar{b}| = 2,\ \bar{a}\bar{b} = 12$. Найти $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

12.5. Пусть $|\bar{a}| = 3,\ |\bar{b}| = 5,\ (\bar{a},\bar{b}) = 60°,\ \overline{AB} = 3\bar{a} + \bar{b},\ \overline{AC} = \bar{a} - 3\bar{b}$. Найти площадь треугольника ABC.

12.6. Найти площадь треугольника ABC, если $A(2,1,0)$, $B(-1,1,2)$, $C(0,-3,-1)$.

12.7. Найти расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}(3,0,2)$, $\overline{AC}(0,1,-1)$.

12.8. Дан тетраэдр $SABC$ с прямыми плоскими углами при вершине S, $SA=8$, $SB=4$, $SC=6$. Точки P,Q,R делят ребра SA,SB,SC в отношениях 1:3, 3:1, 1:1 соответственно, считая от вершины S. Найти площадь треугольника PQR.

12.9. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}(4,-2,-3)$ и $\bar{b}(0,1,3)$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты $\bar{c}$, если $|\bar{c}|=26$.

12.10. Проверить, что для векторов $\bar{a}(1,1,0)$, $\bar{b}(0,3,1)$, $\bar{c}(2,0,1)$ выполняется тождество Якоби

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{0}.$$

12.11. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан, равна $\frac{3}{4}$ площади исходного треугольника.

12.12. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине длины $\overline{AC}\times\overline{BD}$.

12.13. Даны произвольные треугольник ABC и точка M. AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника. Доказать, что площадь одного из треугольников MAA_1, MBB_1, MCC_1 равна сумме площадей двух других.

12.14. $ABCD$ – произвольный тетраэдр. Каждой его грани поставлен в соответствие вектор, перпендикулярный этой грани, направленный вне тетраэдра и имеющий длину, равную площади этой грани. Доказать, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

13. Смешанное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Проверить, лежат ли точки $A(1,-1,0)$, $B(1,1,-2)$, $C(2,-1,4)$, $D(2,-3,6)$ в одной плоскости.

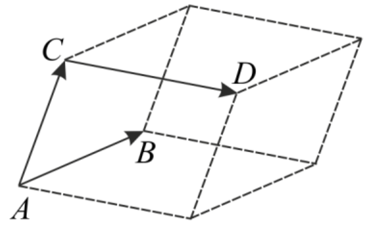
Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости т. и т. т., когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны. $\overline{AB}(0,2,-2)$, $\overline{AC}(1,0,4)$, $\overline{AD}(1,-2,6)$, поэтому

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix}=0\cdot 8-2\cdot 2-2(-2)=0,$$

следовательно, векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны, а точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задача 2. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD можно найти по формуле

$$\rho(AB,CD)=\frac{\left|\left(\overline{AB},\overline{CD},\overline{AC}\right)\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{CD}\right|}.$$



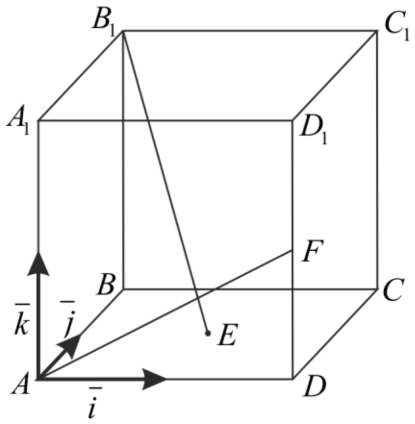
Доказательство. Построим на векторах $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AC}$ параллелепипед. Прямые AB и CD лежат в плоскостях оснований параллелепипеда, поэтому расстояние между ними равно высоте параллелепипеда, которая может быть найдена по формуле

$$h = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{\left|\left(\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC}\right)\right|}{\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|}.$$

Задача 3. Точка E – центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка F – середина ребра DD_1. Найти расстояние между прямыми AF и B_1E.

Решение. Введем ортонормированный базис $\overline{i} = \frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{j} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{k} = \frac{1}{2}\overline{AA_1}$ и найдем координаты векторов $\overline{AF}$, $\overline{B_1E}$ и $\overline{AE}$. $\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 2\overline{i} + \overline{k}$, $\overline{AF}\left(2,0,1\right)$, $\overline{B_1E} = \overline{B_1B} + \overline{BE} = -2\overline{k} + \overline{i} - \overline{j}$, $\overline{B_1E}\left(1,-1,-2\right)$, $\overline{AE} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{AF}\left(1,1,0\right)$. Тогда

$$\left(\overline{AF}, \overline{B_1E}, \overline{AE}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6,$$



$$\overline{AF} \times \overline{B_1E} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k},$$

$$\left|\overline{AF} \times \overline{B_1E}\right| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3},$$

и, согласно предыдущей задаче,

$$\rho\left(AF, B_1E\right) = \frac{\left|\left(\overline{AF}, \overline{B_1E}, \overline{AE}\right)\right|}{\left|\overline{AF} \times \overline{B_1E}\right|} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Существуют ли такие векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, что $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > |\overline{a}||\overline{b}||\overline{c}|$?

13.2. Доказать, что если $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0}$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны.

13.3. Найти $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, если $\overline{a}\left(2,-3,1\right)$, $\overline{b}\left(1,1,2\right)$, $\overline{c}\left(3,1,-1\right)$.

13.4. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}\left(-2,-1,1\right)$, $\overline{b}\left(4,-4,1\right)$, $\overline{c}\left(4,-6,2\right)$.

13.5. Доказать, что точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

13.6. Найти высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A, если $A(2,-4,5)$, $B(-1,-3,4)$, $C(5,5,-1)$, $D(1,-2,2)$.

13.7. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\overline{AB}\left(0,1,-1\right)$, $\overline{AC}\left(2,-1,4\right)$, $\overline{AA_1}\left(-3,2,2\right)$. Найти объем, площадь основания и высоту призмы.

13.8. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на середине стороны AD, точка K делит AB в отношении 2:1, точка N — центр грани CC_1D_1D. Найти объем тетраэдра B_1KMN.

13.9. Точка M делит ребро BB_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении 2:1. Найти расстояние между прямыми CD_1 и MD.

13.10. Найти координаты вершины D тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, $V_{ABCD} = 5$, $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$.

13.11. Точки B_1, B_2, B_3, B_4 являются точками пересечения медиан граней тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Найти отношение объемов тетраэдров $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$.

Плоскости и прямые в пространстве

14. Уравнение плоскости

Примеры решения задач

Задача 1. Вершины тетраэдра $ABCD$ имеют координаты $A(1,0,-2)$, $B(0,1,-1)$, $C(-1,-1,0)$, $D(2,-1,1)$.

а) Составить уравнение плоскости ABD.

б) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой AB.

в) Найти высоту тетраэдра, проведенную из точки C.

г) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку C параллельно плоскости ABD.

Решение. а) Зададим плоскость ABD по точке A и направляющим векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Так как $\overline{AB}(-1,1,1)$, $\overline{AD}(1,-1,3)$, то

$$\Pi_{ABD}: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(x-1)+4y+0(z+2) = 4x+4y-4,$$

$$\Pi_{ABD}: 4x+4y-4=0,$$

$$\Pi_{ABD}: x+y-1=0.$$

б) Составим уравнение искомой плоскости по точке A и вектору нормали $\overline{AB}(-1,1,1)$

$$\Pi: -1(x-1)+1(y-0)+1(z+2)=0,$$

$$\Pi: -x+y+z+3=0.$$

в) Высота тетраэдра равна расстоянию от C до ABD, поэтому ее можно найти по формуле

$$\rho(C, ABD) = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot(-1)+0\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

г) Способ 1. по уравнению плоскости ABD находим её вектор нормали $\overline{n}(1,1,0)$. Вектор $\overline{n}$ будет являться вектором нормали и для искомой плоскости, поскольку она параллельна ABD. Составим уравнение плоскости по точке C и вектору нормали $\overline{n}$:

$$\Pi: 1(x+1)+1(y+1)+0(z-0)=0,$$

$$\Pi: x+y+2=0.$$

Способ 2. Плоскости параллельны, поэтому их уравнения отличаются лишь свободным членом. Поэтому уравнение искомой плоскости имеет вид $x+y+D=0$. Чтобы найти коэффициент D, используем тот факт, что точка C лежит в плоскости, значит, её координаты удовлетворяют уравнению $x+y+D=0$.

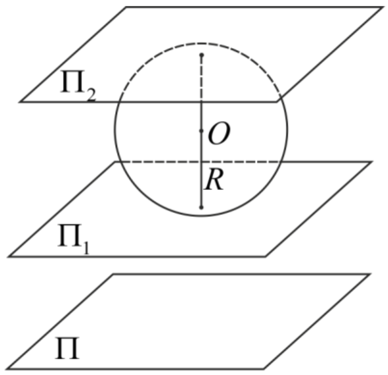
$$-1+(-1)+D=0,$$
$$D=2,$$
Следовательно, искомая плоскость имеет уравнение $x+y+2=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая параллельна плокости $6x+3y+2z-4=0$ и касается сферы $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Решение. Так как данная и искомая плоскости параллельны, то их уравнения отличаются лишь свободным членом, т.е. уравнение искомой плоскости Π имеет вид $6x+3y+2z+D=0$.

Плоскость Π касается сферы, поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, $\rho(O,\Pi)=R$. Так как $O(0,2,-1)$, $R=3$, то

$$\rho(O,\Pi)=\frac{|6\cdot 0+3\cdot 2+2\cdot(-1)+D|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|4+D|}{7}=3.$$



Отсюда

$$|4+D|=21,$$
$$\left[\begin{array}{l}4+D=21,\\ 4+D=-21,\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}D=17,\\ D=-25.\end{array}\right.$$

Действительно, искомых плоскостей две, и их уравнения

$$\Pi_1: 6x+3y+2z+17=0,$$
$$\Pi_2: 6x+3y+2z-25=0.$$

Задача 3. Найти угол между плоскостями $\Pi_1: 16x+8y+2z+1=0$ и $\Pi_2: 2x-2y+z+5=0$.

Решение. Найдем векторы нормали плоскостей: $\overline{n_1}(16,8,2)$, $\overline{n_2}(2,-2,1)$. В качестве вектора нормали первой плоскости также можно взять вектор $(8,4,1)$, т.к. он коллинеарен вектору $\overline{n_1}$. Таким образом,

$$\cos\alpha=\frac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{|8\cdot 2+4\cdot(-2)+1\cdot 1|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{9}{9\cdot 3}=\frac{1}{3},\quad \alpha=\arccos\frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

14.1. Принадлежат ли плоскости $x-2z+4=0$ точки $A(-2,3,0)$ и $B(0,1,2)$? Указать еще несколько точек, принадлежащих этой плоскости.

14.2. Пусть $A(2,1,-2)$, $B(0,-1,3)$, $C(1,-1,1)$. Составить уравнение плоскости ABC и найти точки ее пересечения с координатными осями.

14.3. Найти высоту AH тетраэдра $ABCD$, если $A(1,0,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,0)$, $D(2,-1,0)$.

14.4. Найти расстояние между плоскостями $x-2y-2z+7=0$ и $2x-4y-4z+17=0$.

14.5. Доказать, что расстояние между плоскостями $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ и $\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(\Pi_1,\Pi_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

14.6. Составить уравнение плоскости, которая параллельна плоскости $2x-2y+z-1=0$ и проходит на расстоянии 5 от нее.

14.7. Определить взаимное расположение плоскости $4x-3z+1=0$ и сферы $x^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$.

14.8. Составить уравнение плоскостей, которые параллельны плоскости $2x+y-4z+5=0$ и касаются сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=21$.

14.9. Две грани куба лежат в плоскостях $\Pi_1: 3x-y+z=0,\ \Pi_2: 6x-2y+2z+3=0$. Найти объем куба.

14.10. Написать уравнение плоскости, зная, что точка $M(2,-1,3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

14.11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,0,-5)$ перпендикулярно плоскостям $\Pi_1: y-2z=0,\ \Pi_2: x+2y+3z-1=0$.

14.12. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x+3y+5z-10=0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью XOY.

14.13. Написать уравнение сферы, вписанной в тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $x+2y-2z+8=0$.

14.14. Написать уравнение биссекторных плоскостей двугранного угла, образованного плоскостями $\Pi_1: 3x-2y-z+3=0$ и $\Pi_2: 2x-3y+z=0$.

14.15. Написать уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла, образованного плоскостями $\Pi_1: x-y+2z-1=0$ и $\Pi_2: 2x-y+z-3=0$, которому принадлежит точка $M(1,1,1)$

14.16. Определить расположение точки $M(2,\frac{1}{2},\frac{9}{4})$ относительно тетраэдра с вершинами в точках $A(0,0,2),\ B(3,0,5),\ C(1,1,0),\ D(4,1,2)$.

14.17. Найти угол между плоскостями

а) $x-2y-2z=0$ и $3x+4z+2=0$;

б) $2x-z=0$ и $x+3y-2=0$;

в) $x-2y+z+1=0$ и $-2x+4y-2z=0$.

15. Прямая в пространстве

Примеры решения задач

Задача 1. Найти параметрическое представление прямой, которая проходит через точку $M(1,0,-3)$ и параллельна прямой $l: \begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0. \end{cases}$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой *l*. Для этого возьмем 2 произвольные точки на *l*. Пусть $x=0$, тогда

$$\begin{cases} -y+z-3=0, \\ 3y-z-1=0, \end{cases}$$

$$2y-4=0,\ y=2,$$

$$z=y+3=5,$$

получили точку $A(0,2,5)$. Пусть теперь $y=0$, тогда

$$\begin{cases} 2x+z-3=0, \\ x-z-1=0, \end{cases}$$

$$3x-4=0,\ x=\tfrac{4}{3},$$
$$z=x-1=\tfrac{1}{3},$$
получили точку $B\left(\tfrac{4}{3},0,\tfrac{1}{3}\right)$. Очевидно, вектор $\overline{AB}\left(\tfrac{4}{3},-2,-\tfrac{14}{3}\right)$ – направляющий вектор прямой l, значит, и для искомой прямой он также является направляющим, т.к. прямые параллельны. Находим параметрическое представление прямой по точке M и направляющему вектору

$$AB:\begin{cases}x=1+\tfrac{4}{3}t,\\ y=-2t,\\ z=-3-\tfrac{14}{3}t.\end{cases}$$

Также можно записать еще одно представление искомой прямой, если учесть, что вектор $3\overline{AB}\left(4,-6,-14\right)$ также является направляющим

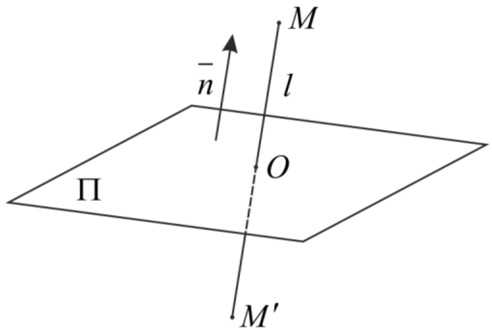
$$AB:\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-6t,\\ z=-3-14t.\end{cases}$$

Задача 2. Найти точку, симметричную точке $M(2,-1,1)$ относительно плоскости $\Pi: y+2z+4=0$.

Решение. Точка M' лежит на прямой l, проходящей через т. M перпендикулярно плоскости Π. Очевидно, вектор нормали плоскости будет направляющим вектором прямой l. Зададим l по точке $M(2,-1,1)$ и вектору $\overline{n}(0,1,2)$

$$l:\begin{cases} x=2, \\ y=-1+t, \\ z=1+2t. \end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямой l и плоскости Π.



$$O=l\cap\Pi,\quad \begin{cases} x=2, \\ y=-1+t, \\ z=1+2t, \\ y+2z+4=0, \end{cases}$$

$$-1+t+2(1+2t)+4=0,$$

$$5t+5=0,$$

$$t=-1.$$

Подставляем значение параметра в представление прямой и получаем точку $O(2,-2,-1)$. Вектор $\overline{OM'}$ равен вектору $\overline{MO}$, поэтому $\overline{OM'}(0,-1,-2)$. Сместив точку O на вектор $\overline{OM'}$, получим точку M'. $M'(2+0,-2-1,-1-2)$, $M'(2,-3,-3)$.

Задача 3. Доказать, что прямые скрещиваются и найти расстояние между ними.

$$l_1:\begin{cases} x=t, \\ y=-2+2t, \\ z=1, \end{cases} \qquad l_2:\begin{cases} x=2-2t, \\ y=-2t, \\ z=-1-t. \end{cases}$$

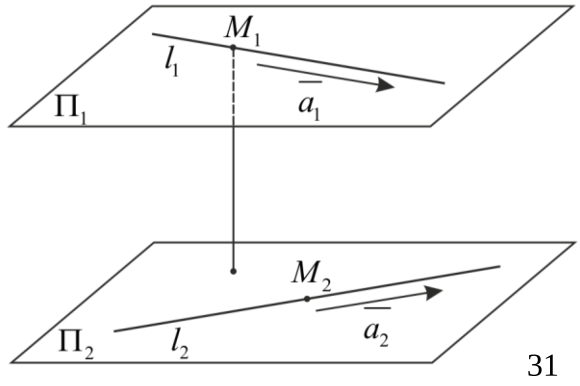
Решение. Найдем направляющие векторы этих прямых: $\overline{a_1}(1,2,0)$, $\overline{a_2}(-2,-2,-1)$. Векторы неколлинеарны, значит, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Чтобы выяснить это, проверим, имеет ли решения система уравнений

$$\begin{cases} t=2-2s, \\ -2+2t=-2s, \\ 1=-1-s. \end{cases}$$

Параметр t в представлении прямой l_2 мы заменили на s, т.к. параметры в представлениях l_1 и l_2 независимы друг от друга, поэтому при одновременной работе с ними их нельзя обозначать одной буквой. Легко проверить, что эта система не имеет решений, поэтому общих точек у прямых нет, значит, они скрещиваются.

Известно, что через любые скрещивающиеся прямые можно провести пару параллельных плоскостей и расстояние между плоскостями равно расстоянию между прямыми.

Векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ являются направляющими векторами плоскости Π_2, поэтому можно составить ее уравнение по этим векторам и какой-нибудь точке прямой l_2. Возьмем, напри-



мер, значение параметра $t = 0$ и получим точку с координатами $M_2(2,0,-1)$. Таким образом,

$$\Pi_2: \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2x+4+y+2z+2 = -2x+y+2z+6,$$

$$\Pi_2: -2x+y+2z+6=0.$$

Возьмем произвольную точку на прямой l_1 (например, при $t = 0$ получим точку $M_1(0,-2,1)$) и найдем расстояние от этой точки до плоскости Π_2 – это и есть расстояние между Π_1 и Π_2, а следовательно, и между l_1 и l_2.

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M, \Pi_2) = \frac{|-2\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = 2.$$

Задача 4. Определить взаимное расположение прямых

$$l_1: \begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 3-t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = -1-6t, \\ y = 4+2t, \\ z = -2-4t. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющие векторы прямых: $\overline{a_1}(3,-1,2)$, $\overline{a_2}(-6,2,-4)$. Векторы коллинеарны, поэтому прямые либо параллельны, либо совпадают.

Возьмем какую-либо точку на прямой l_1, например $M_1(2,3,0)$. Если M принадлежит l_2, то прямые совпадают, в противном случае они параллельны.

Точка М лежит на прямой l_2, если ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 2 = -1-6t, \\ 3 = 4+2t, \\ 0 = -2-4t. \end{cases}$$

Находим, что значение $t = -\frac{1}{2}$ является решением системы, поэтому $M \in l_2$, и, следовательно, прямые совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

15.1. Принадлежат ли прямой $l: \begin{cases} x = -1+4t, \\ y = 3t, \\ z = -1 \end{cases}$ точки $A(-9,-6,-1)$ и $B(0,3,-1)$? Указать еще несколько точек, принадлежащих этой прямой.

15.2. Найти точки пересечения прямой AB с координатными плоскостями, если $A(4,2,-1)$, $B(3,0,2)$.

15.3. Записать параметрическое представление прямой

$$l: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

15.4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1,1,-3)$ параллельно прямым

$$l_1:\begin{cases}2x-2y+3z-4=0,\\ x+2y-4z+1=0,\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}3x-y+z=0,\\ x+y-3z+1=0.\end{cases}$$

15.5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-1,1,3)$ параллельно прямой $l:\begin{cases}x=t,\\ y=-2t,\\ z=3t\end{cases}$ и перпендикулярно плоскости $3x-2y+5z=0$.

15.6. Определить взаимное расположение прямых

а) $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=7+t,\\ z=3+4t,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6+3t,\\ y=-1-2t,\\ z=-2+t;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=t,\\ y=-8-4t,\\ z=-3-3t,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-z=0,\\ 2x-y+2z=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x=9t,\\ y=5t,\\ z=-3+t,\end{cases}$ $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0,\\ x-2y+z+3=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+3y=0,\\ z-4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x+z-8=0,\\ 2y+3z-7=0.\end{cases}$

15.7. Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки $A(-1,2,-3)$ на координатные плоскости.

15.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$l_1:\begin{cases}x=2+3t,\\ y=-1+6t,\\ z=4t\end{cases}$ параллельно прямой $l_2:\begin{cases}x=-1+2t,\\ y=3t,\\ z=-t.\end{cases}$

15.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,3,0)$ и через прямую

$$l:\begin{cases}x=1,\\ y=2+t,\\ z=2-t.\end{cases}$$

15.10. Найти угол между прямой и плоскостью

а) $l:\begin{cases}x=-3+t,\\ y=2-2t,\\ z=-1+2t\end{cases}$ и $\Pi:4x+2y+2z-5=0$;

б) $l:\begin{cases}x=-t,\\ y=1+2t,\\ z=3\end{cases}$ и $\Pi:x-2y+1=0$;

в) $l:\begin{cases}x=0,\\ y=-1+t,\\ z=4-2t\end{cases}$ и $\Pi:4x+2y+z=0$.

15.11. Определить взаимное расположение прямой и плоскости, в случае пересечения найти угол между ними и точку пересечения

а) $l:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Pi:3x+5y-z-2=0$;

б) $l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$, $\Pi:3x-3y+2z-5=0$;

в) $l:\begin{cases} x=13+8t, \\ y=1+2t, \\ z=4+3t, \end{cases}$ $\Pi: x+2y-4z+1=0$;

г) $l:\begin{cases} x=7+5t, \\ y=4+t, \\ z=5+4t, \end{cases}$ $\Pi: 3x-y+2z-5=0$.

15.12. Написать уравнение и найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(-3,13,7)$ на прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}$.

15.13. На прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}$ найти точку, равноудаленную от точек $A(4,-6,1)$ и $B(-2,2,-1)$.

15.14. Найти точку, симметричную точке $M(1,2,3)$ относительно плоскости $2x-3y+5z-68=0$.

15.15. Найти точку, симметричную точке $M(1,2,3)$ относительно прямой $\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}$.

15.16. Составить уравнение проекции прямой $l:\begin{cases} x=3+5t, \\ y=-1+t, \\ z=4+t \end{cases}$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

15.17. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$.

15.18. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $\begin{cases} y=1, \\ z+1=0 \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости перпендикулярно данной прямой.

15.19. Найти общий перпендикуляр к прямым $l_1:\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=2t \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2+2t, \\ z=1. \end{cases}$

15.20. Через точку пересечения плоскости $x-2y+3z+5=0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она принадлежала этой плоскости и была параллельна плоскости Oyz.

15.21. Найти параметрическое представление прямой, которая проходит через начало координат и пересекает каждую из прямых $l_1:\begin{cases} x=t, \\ y=1-t, \\ z=3+t \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=2+2t, \\ y=3-t, \\ z=4+3t. \end{cases}$

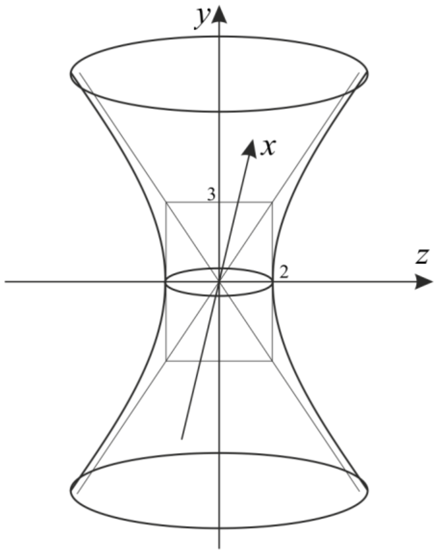
Поверхности второго порядка

16. Поверхности второго порядка. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности второго порядка

Примеры решения задач

Задача 1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, лежащей в плоскости Oyz, около оси Oy и изобразить эту поверхность.

Решение. Поверхность вращения с осью Oy и профилем $\gamma : z = f(y)$ будет иметь уравнение $z^2+x^2=f(y)^2$. В нашем случае $\gamma : \frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ или $\gamma : z=\sqrt{4\left(1+\frac{y^2}{9}\right)}$, поэтому уравнение поверхности будет иметь вид



$$\Phi : x^2+z^2=4\left(1+\frac{y^2}{9}\right),$$

$$\Phi : \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

– однополостный гиперболоид. Изображая в плоскости Oyz гиперболу $\gamma : \frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, а затем окружности, образованные при вращении некоторых ее точек около оси Oy (на изображении они будут эллипсами), получим изображение гиперболоида.

Задача 2. Изобразить поверхность $\Phi : 9x^2-16y^2-36z^2-144=0$, используя метод сечений.

Решение. Перенесем -144 в правую часть уравнения и разделим обе части на -144, получим

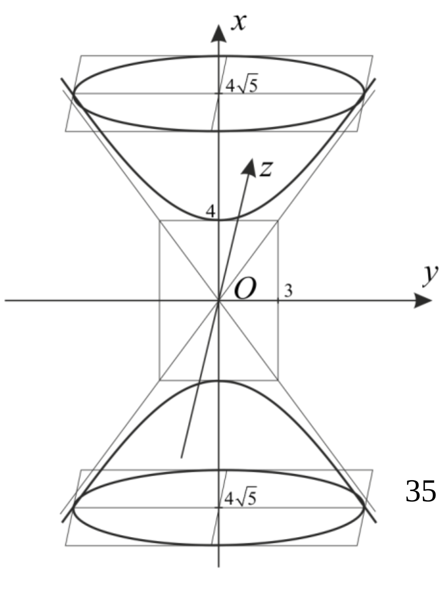
$$\Phi : -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1,$$

поэтому Φ – двуполостный гиперболоид с осью Ox. Для изображения поверхности сделаем ее сечения плоскостями $\Pi_1 : z=0$, $\Pi_2 : x=4\sqrt{5}$, $\Pi_3 : x=-4\sqrt{5}$ – это плоскость Oxy и плоскости, параллельные плоскости Oyz и проходящие через точки $\left(4\sqrt{5},0,0\right)$ и $\left(-4\sqrt{5},0,0\right)$. Пусть $\gamma_1=\Phi\cap\Pi_1$, тогда $\gamma_1 : \begin{cases} z=0, \\ -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1, \end{cases}$ $\gamma_1 : \begin{cases} z=0, \\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$

– гипербола в плоскости Π_1. Сечения $\gamma_2=\Phi\cap\Pi_2$, $\gamma_3=\Phi\cap\Pi_3$ задаются уравнениями

$$\gamma_2 : \begin{cases} x=4\sqrt{5}, \\ -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1, \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x=-4\sqrt{5}, \\ -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1, \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x=4\sqrt{5}, \\ -5+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1, \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x=-4\sqrt{5}, \\ -5+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1, \end{cases}$$



$$\gamma_2:\begin{cases} x=4\sqrt{5}, \\ \dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}=1, \end{cases} \qquad \gamma_3:\begin{cases} x=-4\sqrt{5}, \\ \dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}=1. \end{cases}$$

Кривые γ_2 и γ_3 – эллипсы, лежащие в плоскостях Π_2 и Π_3. Изображая γ_1, γ_2 и γ_3, получим изображение двуполостного гиперболоида.

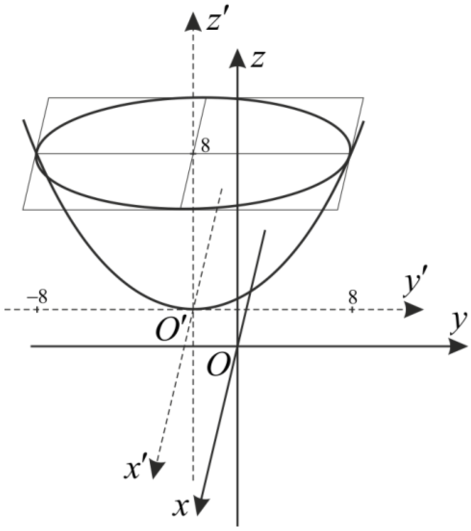
Задача 3. Изобразить поверхность $\Phi: x^2+y^2-2x+4y-8z+21=0$ вместе с системой координат.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду

$$\left(x^2-2x+1-1\right)+\left(y^2+4y+4-4\right)=8z-21,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=8z-16,$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{4}=2(z-2).$$



Введем новую систему координат $O'x'y'z'$, определяемую формулами преобразования координат

$$\begin{cases} x'=x-1, \\ y'=y+2, \\ z'=z-2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x'+1, \\ y=y'-2, \\ z=z'+2. \end{cases}$$

В новой с.к. поверхность имеет уравнение $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{4}=2z'$ – эллиптический параболоид с осью $O'z'$. Изобразим ее, построив в новой с.к. сечения $\gamma_1=\Phi\cap\Pi_1: x'=0$, $\gamma_1:\begin{cases} x'=0, \\ y'^2=8z', \end{cases}$

$$\gamma_2=\Phi\cap\Pi_2: z'=8, \qquad \gamma_2:\begin{cases} z'=8, \\ \frac{x'^2}{64}+\frac{y'^2}{64}=1. \end{cases}$$

Из формул преобразования координат определяем, что новая с.к. получена из старой параллельным переносом на вектор $(1,-2,2)$, поэтому изобразим старую с.к. путем параллельного переноса новой на вектор $(-1,2,-2)$.

Задача 4. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности $\Phi: x^2-4y^2=4z$, проходящих через точку $M(-4,1,3)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $(x-2y)(x+2y)=4z$ и зададим две прямолинейные образующие

$$l_1:\begin{cases} x-2y=4\lambda_1 z, \\ x+2y=\frac{1}{\lambda_1}, \end{cases} \qquad l_2:\begin{cases} x+2y=4\lambda_2 z, \\ x-2y=\frac{1}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Точка M лежит на этих прямых, поэтому, подставляя ее координаты в уравнения прямых

$$\begin{cases} -4-2=12\lambda_1, \\ -4+2=\frac{1}{\lambda_1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4+2=12\lambda_2, \\ -4-2=\frac{1}{\lambda_2}, \end{cases}$$

найдем значения параметров $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ и $\lambda_2=-\frac{1}{6}$, отсюда

$$l_1:\begin{cases}x-2y=-2z,\\ x+2y=-2,\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}x+2y=-\frac{2}{3}z,\\ x-2y=-6.\end{cases}$$

Составляя параметрические представления этих прямых, получим

$$l_1:\begin{cases}x=-2-2t,\\ y=t,\\ z=1+2t,\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}x=-6+2t,\\ y=t,\\ z=9-6t.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

16.1. Доказать, что при сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка.

16.2. Определить тип поверхности

а) $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$; б) $2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$;

в) $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$; г) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$;

д) $4x^2+y^2-16z=0$; е) $2x^2+2y^2-4z+5=0$;

ж) $x^2-2y^2-4x-z+1=0$; з) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

и) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$; к) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

л) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+4=0$; м) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

н) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.

16.3. Доказать, что уравнение $x^2=yz$ задает конус второго порядка.

16.4. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой около оси

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ Ox$; б) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1,\ Oy$; в) $\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1,\ Oz$;

г) $x^2=2y,\ Oy$; д) $y^2-\frac{x^2}{4}=1,\ Ox$; е) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ Oz$;

ж) $z=2y,\ Oy$; з) $x^2=4z,\ Oz$; и) $x^2+\frac{y^2}{9}=1,\ Ox$.

Изобразить эти поверхности.

16.5. Изобразить поверхности, используя метод сечений

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$;

г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$; д) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=0$; е) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;

ж) $z^2=2x$; з) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-z^2=1$; и) $z^2-y^2=1$.

к) $-9x^2+4y^2+4z^2=36$; л) $x^2-y+z^2=0$; м) $x^2-y^2-4z^2=0$.

16.6. Изобразить поверхности вместе с системой координат

а) $4x^2+9y^2+9z^2-8x+36y-54z+85=0$;

б) $4y^2+z^2-8x-16y-16=0$;

в) $4x^2-5y^2+5z^2-8x+30z+29=0$;

г) $4x^2+8y^2-z^2-8x-48y-8z+76=0$;

д) $3x^2-4y^2+12z^2-6x-16y+19=0$.

16.7. Составить уравнение цилиндра, состоящего из прямых, параллельных вектору $\overline{a}(1,0,1)$ и проходящих через точки эллипса $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$, лежащего в плоскости $z=0$.

16.8. Составить уравнение конуса, состоящего из прямых, проходящих через точку $S(1,1,0)$ и точки окружности $x^2+z^2-z=0$, лежащей в плоскости $y=0$.

16.9. Составить уравнение кругового конуса с осью Oz и вершиной в начале координат, если известно, что точка $M(3,-4,7)$ принадлежит конусу.

16.10. Сделать эскиз тела, ограниченного поверхностями

а) $y^2=4-3x$, $y^2=x$, $z=\pm 2$;

б) $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$;

в) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z=0$;

г) $x^2+y^2=1$, $x^2-1=z$, $z=0$;

д) $x^2+2y^2=z$, $z=4-x^2$.

16.11. Может ли число прямолинейных образующих, проходящих через точку поверхности второго порядка, быть равным $0,1,2,3,\ldots\infty$? Привести примеры.

16.12. Доказать, что плоскость Π пересекает поверхность Φ по прямолинейным образующим и составить их уравнения

а) $\Pi: 2x-12y-z+16=0$, $\Phi: x^2-4y^2=2z$;

б) $\Pi: 4x-5y-10z-20=0$, $\Phi: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

16.13. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности Φ, параллельных плоскости Π. Найти точку, в которой они пересекаются, и угол между ними

а) $\Pi: 6x+4y+3z-17=0$, $\Phi: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$;

б) $\Pi: 3x+2y-4z=0$, $\Phi: \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$.

16.14. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности Φ, проходящих через точку M

а) $M(3,-2,2)$, $\Phi: 4x^2-y^2=16z$;

б) $M(6,-3,2)$, $\Phi: x^2+4y^2-9z^2=36$.