ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» разработан для студентов 1-го курса математического факультета, обучающихся по специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика», и рассчитан на изучение дисциплины в 1 и 2 семестрах.

Общенаучная направленность данной дисциплины имеет своей целью ознакомление студентов с современным геометрическим языком и символикой, с методами и приемами решения задач школьной геометрии, при которых используются фундаментальные идеи и методы современной геометрии.

С точки зрения профессиональной направленности курс аналитической геометрии и преобразований плоскости занимает особо важное место в подготовке будущих преподавателей математики, так как некоторые вопросы этого курса (векторы, координаты точек, некоторые уравнения прямой, некоторые преобразования плоскости) изучаются в курсе геометрии средней школы.

Цель УМК - обеспечить эффективное освоение обучающимися учебного материала, входящего в учебную программу дисциплины, организовать самостоятельную работу студентов.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» состоит из четырех разделов: теоретическая, практическая, контрольная и сопровождающая часть.

Теоретическая часть содержит краткий текст лекции по дисциплине. Практическая часть состоит из примеров решений задач и задач для самостоятельного решения. Контрольная часть содержит задания для подготовки к контрольным работам и вопросы для подготовки к экзаменам. В сопровождающей части содержится список литературы.

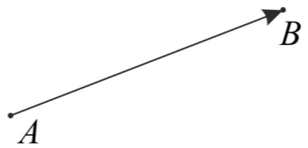
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

РАЗДЕЛ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1 Элементы векторной алгебры

Направленный отрезок. Понятие геометрического вектора. Сумма векторов. Произведение вектора на число

Отрезок, концы которого упорядочены, называется ***направленным отрезком***. Первый из его концов называется началом, а второй – концом направленного отрезка. ***Длиной*** направленного отрезка $\overline{AB}$ (обозначается $\left|\overline{AB}\right|$) называется длина отрезка AB. Если точки A и B совподают, то направленный отрезок $\overline{AB}$ называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}$.



Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***коллинеарными*** (обозначается $\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}$), если прямые AB и A_1B_1 паралельны или совпадают.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***сонаправленными*** (обозначается $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A_1B_1}$), если они коллинеарны и имеют одинаковое направление.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называются ***противоположно направленными*** (обозначается $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A_1B_1}$), если они коллинеарны и имеют разные направления.

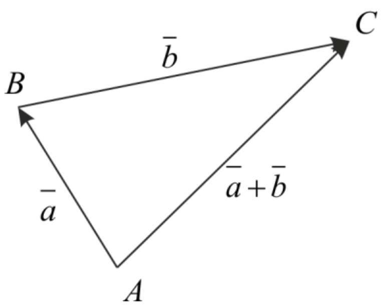
Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называется ***равными*** (обозначается $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$), если они сонаправлены и их длины совпадают.

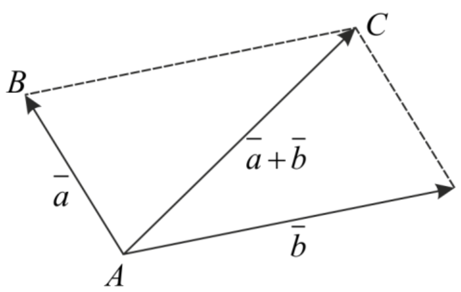
Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ называется ***противоположными*** (обозначается $\overline{AB} = -\overline{A_1B_1}$), если они противоположно направлены и их длины совпадают.

Геометричеким вектором называется множество всех равных между собой направленных отрезков.

Про направленный отрезок $\overline{AB}$ можно сказать, что он является изображающим вектор $\overline{AB}$. Равные направленные отрезки изображают один и тот же вектор. Нулевым вектором называется вектор изображаемый нулевым направленным отрезком. Длиной вектора называется длина изображаемого его направленного отрезка. Векторы называются коллинеарными, если коллинеарны изображающие их направленные отрезки. Понятия сонаправленных и противоположно направленных, а также равных и противоположных векторов вводятся анологично.

Суммой векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{BC}$ называется вектор $\overline{AC}$, т.о. сложение осуществляется по правилу треугольника.





Сложение также можно определить и через правило параллелограмма.

Свойства опереции сложения векторов.

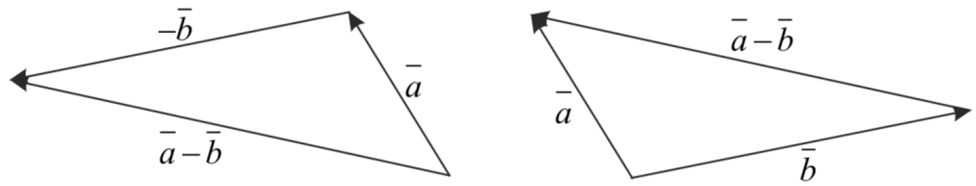
1°. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$;

3°. Существует вектор $\overline{0}$, такой что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}\quad\forall\overline{a}$. $\overline{0}$ – нулевой вектор.

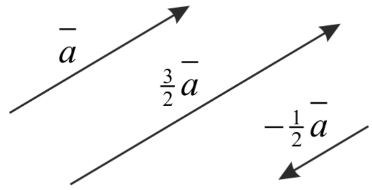
4°. $\forall\overline{a}\quad\exists\left(-\overline{a}\right)$, такой что $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\left(-\overline{a}\right)+\overline{a}=\overline{0}$. $-\overline{a}$ – противоположный вектор.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем называть вектор, равный $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$. Разность можно вычислять по правилу треугольника.



Произведением вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}=\alpha\cdot\overline{a}$, который удволетворяет требованиям

1. $|\overline{b}|=|\alpha||\overline{a}|$;
2. $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, если $\alpha>0$,
3. $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, если $\alpha<0$.



Свойства операции умножения вектора на число.

1°. $0|\overline{a}|=\overline{0}$;

2°. $\alpha\cdot\overline{0}=\overline{0}$;

3°. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

4°. $\left(-1\right)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$;

5°. $\alpha\left(\beta\cdot\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\overline{a}$;

6°. $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}$;

7°. $\alpha\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}+\alpha\cdot\overline{b}$.

Понятие векторного пространства

Векторным пространством V называется некоторое множество произвольной математической природы, на котором определена операции сложения элементов (векторов) и умножения элемента (вектора) на число, удволетворяющие следующим условиям (аксиомам векторного пространства):

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}\quad\forall\overline{a},\overline{b}\in V$;

2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\quad\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$;

3) Существует вектор $\overline{0}$, такой что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in V$. $\overline{0}$ – нулевой вектор.

4) $\forall\overline{a}\in V\quad\exists\left(-\overline{a}\right)\in V$, такой что $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\left(-\overline{a}\right)+\overline{a}=\overline{0}$. $-\overline{a}$ – противоположный вектор.

5) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}\quad \forall\overline{a}\in V$;

6) $\alpha\left(\beta\cdot\overline{a}\right)=(\alpha\beta)\cdot\overline{a}\quad \forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

7) $(\alpha+\beta)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}\quad \forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

8) $\alpha\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}+\alpha\cdot\overline{b}\quad \forall\overline{a},\overline{b}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Примеры векторных пространств.

1. $\mathbb{R}^n=\left\{(a_1,a_2,...,a_n)\mid a_k\in\mathbb{R}\right\}$ – векторное пространство строк длины n.

Сложение векторов и умножение вектора на число осуществляются по правилам

$(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n),\ \alpha\cdot(a_1,a_2,...,a_n)=(\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n)$.

Нулевой вектор – строка $(0,0,...,0)$. Вектор, противоположный к вектору $(a_1,a_2,...,a_n)$ – строка $(-a_1,-a_2,...,-a_n)$.

2. $C[a,b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Сложение векторов и умножение вектора на число осуществляются по правилам $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$. Нулевой вектор – функция, тождественно равная нулю $f(x)=0$. Вектор, противоположный к функции $f(x)$ – функция $-f(x)$.

3. V^2 – множество геометрических векторов плоскости.

4. V^3 – множество геометрических векторов пространства.

Простейшие свойства векторного пространства.

1°. Нулевой вектор только один;

2°. для каждого вектора существоет единственный ему противоположный;

3°. $0\cdot\overline{a}=\overline{0},\ \alpha\cdot\overline{0}=\overline{0}\quad \forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$;

4°. $\alpha\cdot\overline{a}=\overline{0}\Rightarrow\alpha=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$;

5°. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}\quad \forall\overline{a}\in V$;

Пусть $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

6°. $(\alpha-\beta)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}-\beta\cdot\overline{a}\quad \forall\overline{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

7°. $\alpha\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=\alpha\cdot\overline{a}-\alpha\cdot\overline{b}\quad \forall\overline{a},\overline{b}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Линейная зависимость и независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$ называется сумма

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{a_k},\quad \alpha_k\in\mathbb{R}.$$

Если все коэффициенты α_k линейной комбинации равны нулю, то такая линейная комбинация называется ***тривиальной***, в противном случае она называется ***нетривиальной***.

Говорят ,что вектор $\overline{b}$ раскладывается по векторам $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$ (или линейно выражается через векторы $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$), если он является некоторой их линейной комбинацией.

Набор векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ будем называть системой.

Система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если хотя бы один вектор системы выражается через остальные.

Система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется ***линейно независимой***, если ни один вектор из этой системы не может быть выражен через остальные.

Критерий линейной зависимости системы векторов: система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору, т.е. существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не равные одновременно нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Критерий линейной независимости системы векторов: система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда лишь тривиальная линейная комбинация векторов этой системы может равняться нулевому вектору.

Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе

Упорядоченая система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ векторного пространства V называется ***базисом*** этого пространства, если она линейно независима и любой вектор пространства V линейно выражается через эту систему.

Любые два базиса векторного пространства V содержат одинаковое количество векторов.

Размерностью векторного пространства V (обозначается $\dim V$) называется количество векторов в одном из его базисов. Если $\dim V = n$, то V – n-мерное пространство.

Примеры:

1. V^1 – множество геометрических векторов на прямой. $\dim V^1 = 1$, т.к. базис состоит из одного вектора;
2. V^2 – множество векторов плоскости. $\dim V^2 = 2$, базис состоит из двух векторов;
3. V^3 – множество векторов плоскости. $\dim V^3 = 3$, базис состоит из трех векторов;
4. $\mathbb{R}^n$ – множество строк длины n. $\dim \mathbb{R}^n = n$, в качестве базиса можно взять, например, систему строк $\overline{e_1} = (1, 0, ..., 0)$, $\overline{e_2} = (0, 1, ..., 0)$, …, $\overline{e_n} = (0, 0, ..., 1)$;
5. $C[a,b]$ – бесконечномерное пространство, т.к., например, система $\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx$ линейно независима при любом n.

Если $\dim V = n$, то любая линейно независимая система из n векторов образует базис этого пространства..

Если вектор $\overline{a}$ имеет в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ разложение $\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + ... + a_n \overline{e_n}$, то числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются ***координатами*** вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ (обозначается $\overline{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$).

Координаты вектора в данном базисе определены однозначно. Кординатная строка суммы векторов равна сумме кординатных строк слагаемых векторов. Координатная строка произведения вектора на число равна произведению числа на координатную строку этого вектора.

Скалярное произведение векторов

Углом между ненулевыми векторами $\overline{a}=\overline{OA}$ и $\overline{b}=\overline{OB}$ называется угол $\angle AOB$. Будем обозначать его через $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определен.

Скалярным произведением ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}).$$

Если хотя бы один из векторов нулевой,то скалярное произведение по определению равно нулю.

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{a}})=|\overline{a}|^2$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^2$. Длина вектора и его скалярный квадрат связаны соотношением $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$, $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами острый, и отрицательно, если угол тупой.

Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые, то конус угла между ними можно найти по формуле

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Основные свойства скалярного произведения.

1°. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;

2°. $\left(\alpha\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\alpha\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$;

3°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$;

4°. $\overline{a}\cdot\overline{a}>0$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$.

Если $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\frac{\pi}{2}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***ортогональными*** (обозначаем $\overline{a}\perp\overline{b}$). Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны т. и т. т., когда их скалярное произведение равно нулю.

Вектор $\overline{a}$ называется ***нормированным***, если его длина равна 1.

Базис состоящий из нормированных попарно ортогональных векторов, называется ***ортонормированным***.

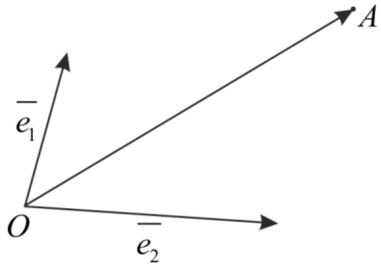
Если в ортонормированном базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}(b_1,b_2,b_3)$, то

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;
2. $a_1=\overline{a}\cdot\overline{e_1}$, $a_2=\overline{a}\cdot\overline{e_2}$, $a_3=\overline{a}\cdot\overline{e_3}$;
3. $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;
4. $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

1.2 Метод координат на плоскости

Аффинная система координат на плоскости

Совокупность точки и базиса векторов плоскости называется ***аффинной системой координат*** (или ***аффинным репером***) на плоскости. Будем обозначать аффинную систему координат с началом в точке O и базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ через $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$.



Вектор $\overline{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Соотношение $A \leftrightarrow \overline{OA}$ биективно.

Аффинными координатами точки A в репере $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

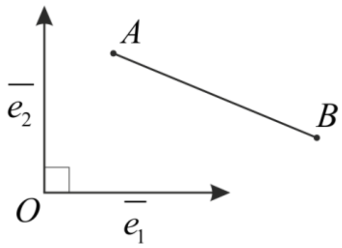
Если $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, то $\overline{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, т.е. чтобы найти координаты вектора, нужно из координаты конца вычесть координаты начала.

Если точка B получена смещением точки $A(a_1, a_2)$ на вектор $\overline{x}(x_1, x_2)$, то $B(a_1 + x_1, a_2 + x_2)$, т.е. чтобы сместить точку на вектор, необходимо сложить координаты этих точки и вектора.

Пусть A, B, C – коллинеарные (лежащие на одной прямой) точки и $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$. Число λ называется ***простым отношением*** точек A, B, C и обозначается $\lambda = (ABC)$.

Если C лежит между A и B, то говорят, что C делит отрезок AB в отношении λ.

Если $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $(ABC) = \lambda$, то $C\left(\dfrac{a_1 + \lambda b_1}{1+\lambda}, \dfrac{a_2 + \lambda b_2}{1+\lambda}\right)$.



Декартовой системой координат (***ортонормированным репером***) называется аффинная система координат, базис которой ортонормирован.

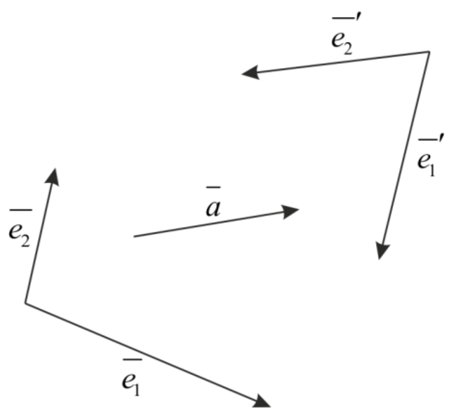
В декартовой системе координат расстояние между точками $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

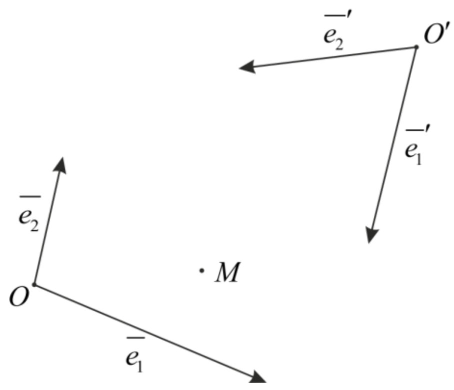
Формулы преобразования координат векторов и точек плоскости

Пусть $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) и $\overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2) – два базиса на плоскости. Первый условно будем называть старым, а второй – новым. Будем считать, что координаты векторов нового базиса относительно старого известны: $\overline{e_1}' = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2}$, $\overline{e_2}' = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2}$. Если вектор $\overline{a}$ имеет координаты $\overline{a}(x_1, x_2)$ в базисе (1) и $\overline{a}(x_1', x_2')$ в базисе (2), то его старые и новые координаты связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases}$$ – формулы преобразования координат векторов плоскости.



Присоединим к базисам (1) и (2) точки O и O', получим системы координат $O, \overline{e}_1, \overline{e}_2$ (3) и $O', \overline{e}_1', \overline{e}_2'$ (4). Пусть $O'(\alpha_1, \alpha_2)$ в старом репере (3), а точка M имеет координаты $M(x_1, x_2)$ в репере (3) и $M(x_1', x_2')$ в репере (4). Тогда ее старые и новые координаты связаны соотношениями

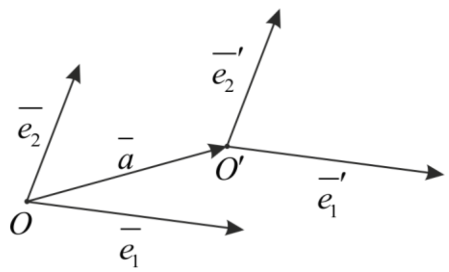


$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \alpha_1, \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \alpha_2 \end{cases}$$

– формулы преобразования координат точек плоскости.

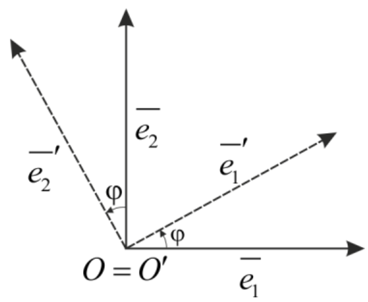
Формулы преобразования координат точек при параллельном переносе на вектор $\overline{a}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \alpha_1, \\ x_2 = x_2' + \alpha_2. \end{cases}$$



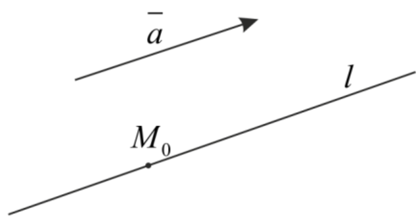
Формулы преобразования декартовых координат точек при повороте системы координат на угол φ

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos\varphi - x_2' \sin\varphi, \\ x_2 = x_1' \sin\varphi + x_2' \cos\varphi. \end{cases}$$



1.3 Прямая на координатной плоскости

Уравнение прямой в аффинной системе координат



Точкой $M_0(x_0, y_0)$ и вектором $\overline{a}(a_1, a_2)$ однозначно задается прямая, проходящая через точку M_0 и параллельная $\overline{a}$. Будем обозначать эту прямую $l : M_0, \overline{a}$. Вектор $\overline{a}$ называется ***направляющим*** вектором прямой l. Прямая имеет бесконечно много направляющих векторов, но все они коллинеарны между собой.

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$ – параметрическое представление прямой l,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$ – каноническое уравнение прямой l.

Каноническое уравнение легко преобразовать к виду $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой. Вектор с координатами $(-B, A)$ является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда

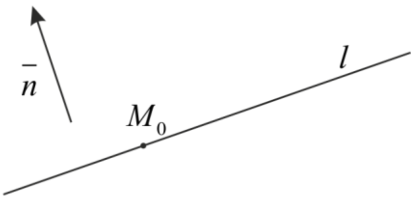
1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
2. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

(считаем, что отношение $\frac{0}{0}$ равно любому отношению).

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $l: Ax+By+C=0$ т. и т. т., когда числа $\alpha_1 = Ax_1+By_1+C$ и $\alpha_2 = Ax_1+By_1+C$ имеют один знак.

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $Ax+By+C<0$ (или $Ax+By+C>0$) есть одна из полуплоскостей относительно прямой $l: Ax+By+C=0$.

Уравнение прямой в декартовой системе координат



Вектор ***нормали*** прямой – это вектор, ортогональный направляющему вектору этой прямой. Все векторы нормали данной прямой коллинеарны между собой. Прямая однозначно задается точкой M_0 и вектором нормали $\overline{n}$.

Пусть в декартовой системе координат $M_0(x_0, y_0)$, $\overline{n}(n_1, n_2)$. Тогда прямая, определяемая точкой M_0 и вектором нормали $\overline{n}$, задается уравнением

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0.$$

Если в декартовой системе координат $l: Ax+By+C=0$, то вектор $\overline{n}(A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

В декартовой системе координат расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(M, l) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

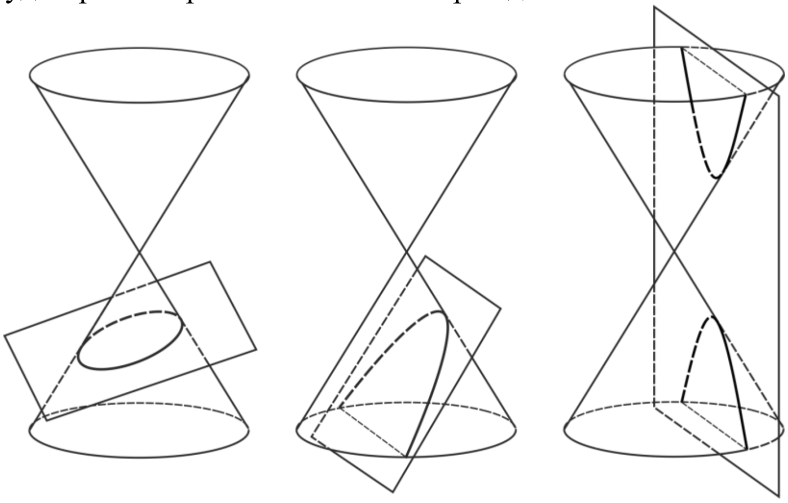
Косинус угла между прямыми, заданными в декартовой системе координат уравнениями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, вычисляется по формуле

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_2^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

1.4 Линии второго порядка

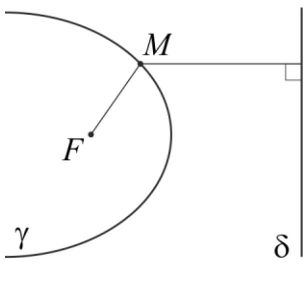
Конические сечения

Коническое сечение есть пересечение плоскости с круговым конусом. Существует три главных типа конических сечений: эллипс, парабола и гипербола (плоскость сечения не проходит через вершину эллипса). К вырожденным сечениям относятся точка, прямая и пара прямых. Будем рассматривать только невырожденные конические сечения.



Можно определить невырожденное коническое сечение и сразу на плоскости, не прибегая к рассмотрению конуса.

Пусть F – фиксированная точка плоскости, δ – фиксированная прямая, причем $F \notin \delta$. ***Коническим сечением*** будем называть множество точек, для каждой из которых отношение расстояния до F к расстоянию до δ есть величина постоянная



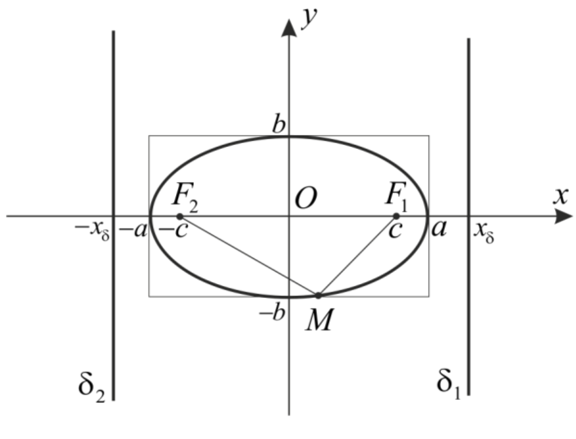
$$\gamma = \left\{ M \mid \frac{MF}{\rho(M,\delta)} = \varepsilon = const \right\}.$$

Точка F называется ***фокусом***, прямая δ – ***директрисой***, число ε – ***эксцентриситетом*** конического сечения. При $\varepsilon < 1$ коническое сечение является эллипсом, при $\varepsilon = 1$ – параболой, при $\varepsilon > 1$ – гиперболой.

Уравнения конических сечений в декартовых координатах. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы. Фокальные свойства конических сечений

Эллипс.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса в декартовых координатах. В каноническом уравнении $a > b$. Число a называется большой полуосью эллипса, b – малой полуосью. $|x| = a,\ |y| = b$ – основной прямоугольник эллипса. Точки с координатами $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ – вершины эллипса.



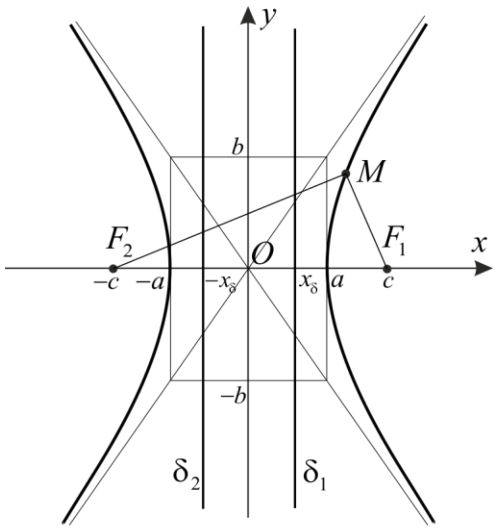
Оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса, поэтому у эллипса два фокуса и две директрисы. Фокусы находятся в точках $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Уравнения директрис: $\delta_{1,2}: x=\pm x_\delta$, где $x_\delta=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{\varepsilon}$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равна *2a*

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Гипербола.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы в декартовых координатах.



Число a называется действительной полуосью гиперболы, b – мнимой полуосью. $|x|=a,\ |y|=b$ – основной прямоугольник гиперболы. Точки с координатами $(a,0)$, $(-a,0)$ – вершины гиперболы.

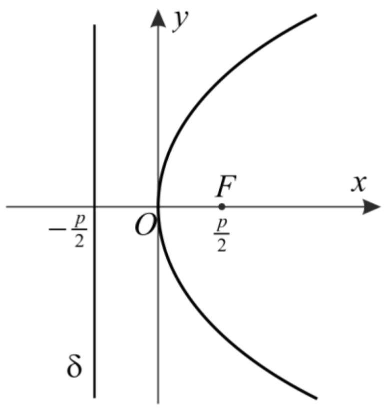
Оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы, поэтому у гиперболы два фокуса и две директрисы. Фокусы находятся в точках $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Уравнения директрис: $\delta_{1,2}: x=\pm x_\delta$, где $x_\delta=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{\varepsilon}$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная *2a*

$$|MF_1-MF_2|=2a.$$

Парабола.

$y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы в декартовых координатах.



Точка $(0,0)$ – вершина параболы. Ось Ox является осью симметрии параболы. У параболы один фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и одна директриса $\delta: x=-\frac{p}{2}$.

Кривые второго порядка и их классификация

Кривая второго порядка – кривая, которая в некоторой аффинной системе координат Oxy задается уравнением второй степени от двух переменных

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\qquad A^2+B^2+C^2>0.$$

Кривая второго порядка в любой аффинной системе координат задается уравнением второй степени.

Всякая кривая второго порядка есть одна из кривых: эллипс, гипербола, парабола, пара параллельных прямых, пара пересекающихся прямых, прямая, точка, пустое множество.

Примеры:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс;

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола;
3. $y^2=2px$ – парабола;
4. $xy=0$ – пара пересекающихся прямых;
5. $x^2=1$ – пара параллельных прямых;
6. $x^2=0$ – прямая;
7. $x^2+y^2=0$ – точка;
8. $x^2+y^2+1=0$ – пустое множество.

Эта классификация была известна уже Ферма, ему же принадлежит основная идея доказательства:

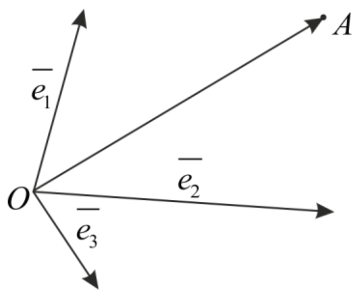
1. Выбираем произвольную декартовую систему координат Oxy, в ней кривая задается уравнением второй степени;
2. Поворачиваем систему координат вокруг начала координат на такой острый угол, чтобы в новой системе координат $O'x'y'$ в уравнении отсутствовало слагаемое Bxy.
3. Подвергаем систему координат $O'x'y'$ параллельному переносу, чтобы в полученной системе координат $O''x''y''$ кривая задавалась еще более простым уравнением, тогда ее можно опознать.

РАЗДЕЛ II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов

Аффинная и декартова системы координат в пространстве

Совокупность точки и базиса векторов пространства называется ***аффинной системой координат*** (или ***аффинным репером***) в пространстве. Будем обозначать аффинную систему координат с началом в точке O и базисом $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ через $O,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$.



Вектор $\overline{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Соотношение $A\leftrightarrow\overline{OA}$ биективно.

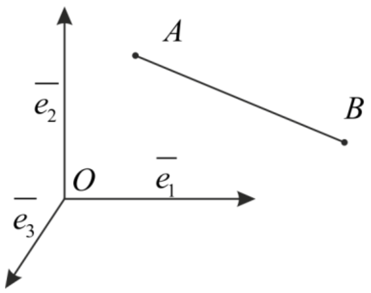
Аффинными координатами точки A в репере $O,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$.

Если $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, то $\overline{AB}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, т.е. чтобы найти координаты вектора, нужно из координаты конца вычесть координаты начала.

Если точка B получена смещением точки $A(a_1,a_2,a_3)$ на вектор $\overline{x}(x_1,x_2,x_3)$, то $B(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3)$, т.е. чтобы сместить точку на вектор, необходимо сложить координаты этих точки и вектора.

Если $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ и $(ABC)=\lambda$, то

$$C\left(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}\right).$$



Декартовой системой координат (***ортонормированным репером***) называется аффинная система координат, базис которой ортонормирован.

В декартовой системе координат расстояние между точками $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ находится по формуле

$$|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}\ .$$

Векторное произведение векторов

Будем считать, что в базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ все векторы выходят из одной точки. Если из конца вектора $\overline{e_3}$ кратчайший поворот вектора $\overline{e_1}$ к вектору $\overline{e_2}$ происходит против часовой стрелки, то базис $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ называется правым, если по часовой – левым.

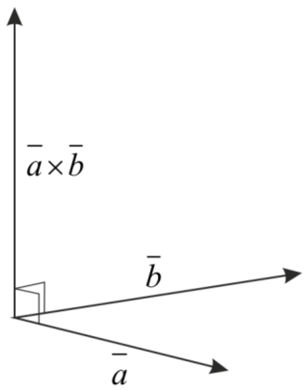
Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\overline{c}|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$;

2. $\overline{c}\perp\overline{a},\ \ \overline{c}\perp\overline{b}$;

3. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то базис $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ правый.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем обозначать через $\overline{a}\times\overline{b}$.



Основные свойства векторного произведения.

1°. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;

2°. $(\alpha\overline{a})\times(\beta\overline{b})=\alpha\beta(\overline{a}\times\overline{b})$;

3°. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.

Геометрический смысл модуля векторного произведения: длина векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Пусть в правом ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}(b_1,b_2,b_3)$, тогда

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\overline{k}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число, равное $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$.

Смешанное произведение векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ будем обозначать через $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

Основные свойства смешанного произведения.

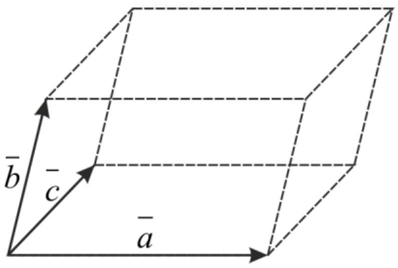
$1°$. При циклической перестановке множителей смешанное произведение не изменяется, при нарушении цикличности оно меняет знак

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right)=\left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)=-\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=-\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right);$$

$2°$. $\left(\alpha\bar{a},\beta\bar{b},\gamma\bar{c}\right)=\alpha\beta\gamma\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$;

$3°$. Смешанное произведение дистрибутивно относительно каждого из множителей

$$\left(\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a}_1,\bar{b},\bar{c}\right)+\left(\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}\right).$$



Геометрический смысл модуля смешанного произведения: модуль смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

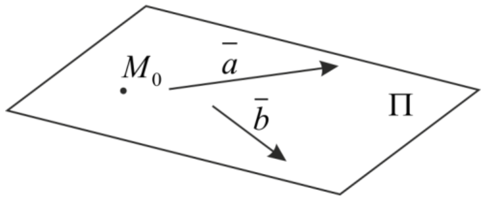
Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны $\Leftrightarrow\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$.

Пусть в правом ортонормированном базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имеют координаты $\bar{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\bar{b}\left(b_1,b_2,b_3\right)$, $\bar{c}\left(c_1,c_2,c_3\right)$, тогда

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.$$

2.2 Плоскости и прямые в пространстве

Уравнение плоскости



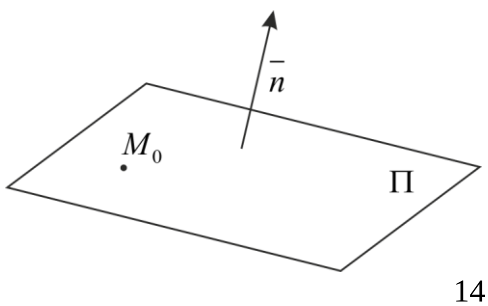
Вектор, параллельный плоскости, называется ***направляющим*** вектором этой плоскости. Плоскость однозначно определяется своей точкой M_0 и двумя неколлинеарными направляющими векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Будем в этом случае писать $\Pi: M_0,\bar{a},\bar{b}$. Если $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\bar{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\bar{b}\left(b_1,b_2,b_3\right)$, то уравнение плоскости Π будет иметь вид

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$Ax+By+Cz+D=0$$

– общее уравнение плоскости.



Вектор, перпендикулярный плоскости, называется ***нормальным*** вектором (или вектором ***нормали***) этой плоскости. Плоскость однозначно определяется своей точкой M_0 и вектором нормали $\bar{n}$.

Если $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\bar{n}\left(n_1,n_2,n_3\right)$, то плоскость Π задается уравнением

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0.$$

Если плоскость задается своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор с координатами (A,B,C) – ее вектор нормали.

Пусть $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда

1. $\Pi_1=\Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$;
2. $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

Следовательно, можно считать, что уравнения параллельных плоскостей отличаются лишь свободными членами.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то косинус угла между плоскостями Π_1 и Π_2 можно найти через косинус угла между их нормальными векторами $\overline{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2,B_2,C_2)$

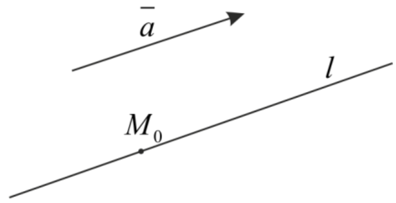
$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\widehat{\overline{n_1},\overline{n_2}}\right)\right|=\frac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ лежат в одном полупространстве относительно плоскости $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ т. и т. т., когда числа $\alpha_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ и $\alpha_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ имеют один знак.

Прямая в пространстве

Точкой $M(x_0,y_0,z_0)$ и вектором $\overline{a}(a_1,a_2,a_3)$ однозначно задается прямая, проходящая через точку M_0 и параллельная $\overline{a}$. Будем обозначать эту прямую $l: M_0,\overline{a}$. Вектор $\overline{a}$ называется ***направляющим*** вектором прямой l.

$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$ – параметрическое представление прямой l,



$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ – каноническое уравнение прямой l.

Также прямая может быть задана как пересечение двух плоскостей с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

определяющих эти плоскости.

Пусть $l: \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$. Синус угла между прямой и плоскостью можно вычислить через косинус угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{n}}\right)\right| = \frac{\left|\overline{a}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|a_1A + a_2B + a_3C\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.3 Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, которая в произвольной аффинной системе координат задается уравнением второй степени от трех неизвестных

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{13}xz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0,$$

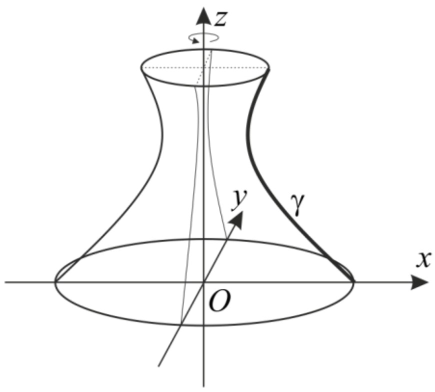
где хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ отличен от нуля.

Далее полагаем, что система координат – декартова.

Поверхности вращения

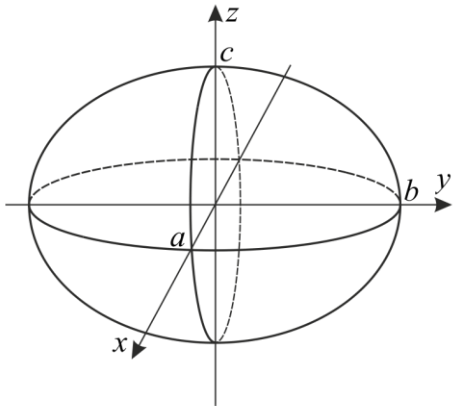
Пусть $\gamma : x = f(z)$ – кривая, лежащая в плоскости xOy. При вращении кривой γ около оси Oz описывается некоторая поверхность Φ, называемая поверхностью вращения. При этом γ называется профилем вращения, ось Oz – осью вращения. Уравнение поверхности Φ имеет вид

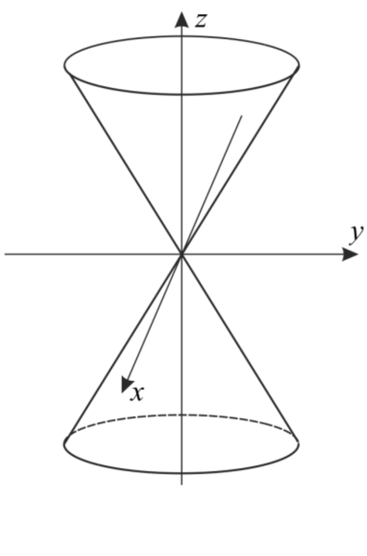
$$\Phi : x^2 + y^2 = f(z)^2.$$



Основные типы поверхностей второго порядка и их канонические уравнения

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – ***эллипсоид***. Числа a, b, c называют полуосями эллипсоида. Если все полуоси различны, то эллипсоид называется трехосным. Если равны две полуоси, то эллипсоид является поверхностью вращения и называется эллипсоидом вращения. При $a = b = c$ эллипсоид представляет сферу.



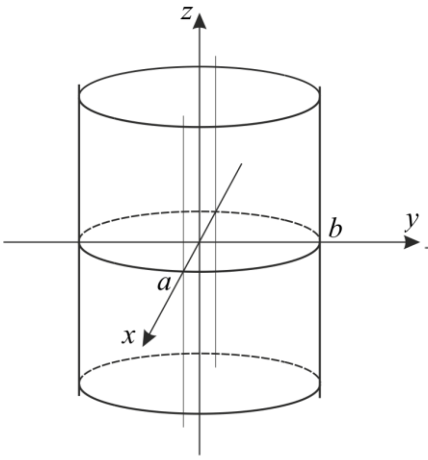


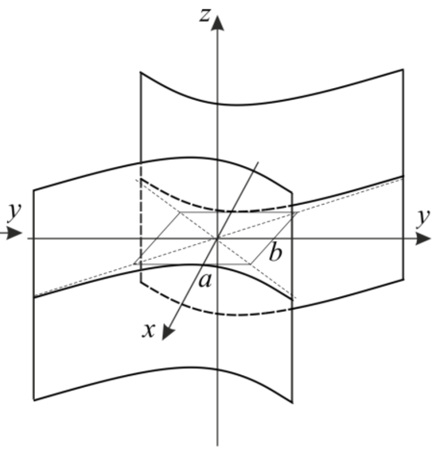
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – ***конус второго порядка***. При $a = b$ конус является круговым.

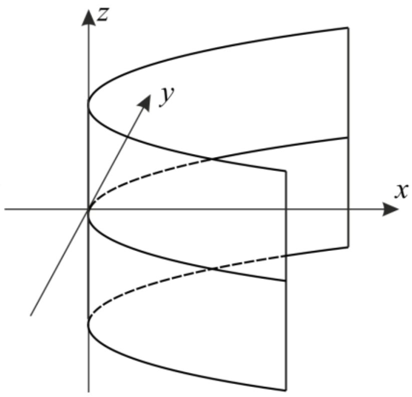
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ***эллиптический цилиндр***.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ***гиперболический цилиндр***.

$y^2 = 2px$ – ***параболический цилиндр***.

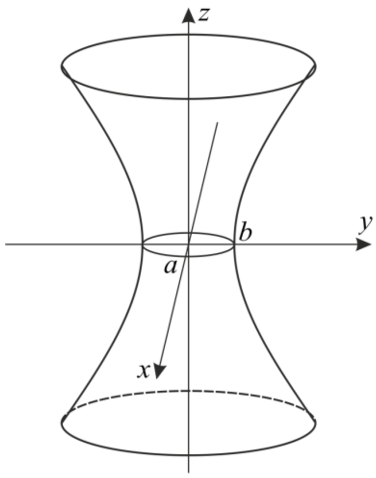


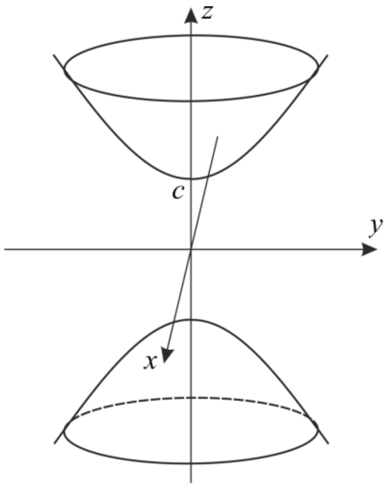




$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – ***однополостный гиперболоид***.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – ***двуполостный гиперболоид***.

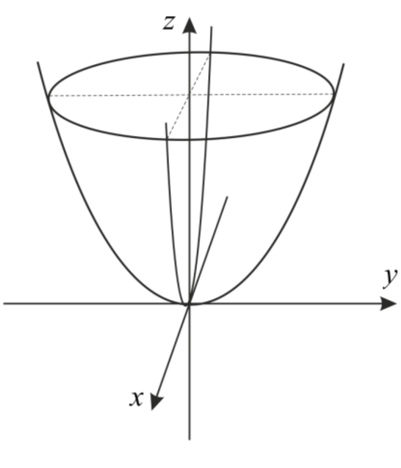


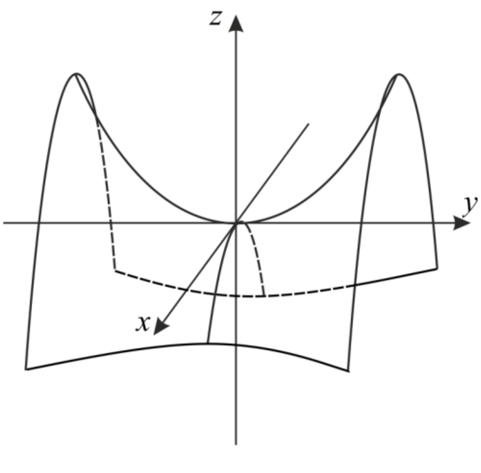


При $a=b$ гиперболоиды являются поверхностями вращения.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ – ***эллиптический параболоид***. При $a=b$ называется параболоидом вращения.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ – ***гиперболический параболоид***.





Линейчатые поверхности второго порядка

Поверхность называется ***линейчатой***, если через каждую ее точку проходит хотя бы одна прямая, целиком лежащая на этой поверхности. Такая прямая называется ***прямолинейной образующей*** поверхности.

Очевидно, цилиндры и конусы второго порядка – линейчатые поверхности. К линейчатым поверхностям второго порядка также принадлежат однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Прямые

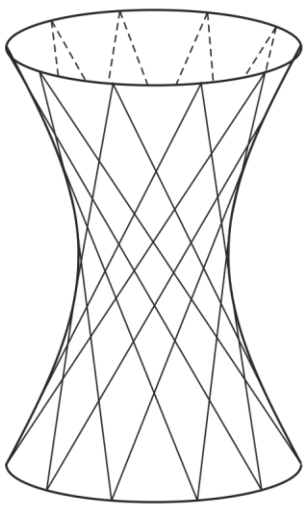
$$l_1(\lambda_1):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_1}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}\qquad l_2(\lambda_2):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_2}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$

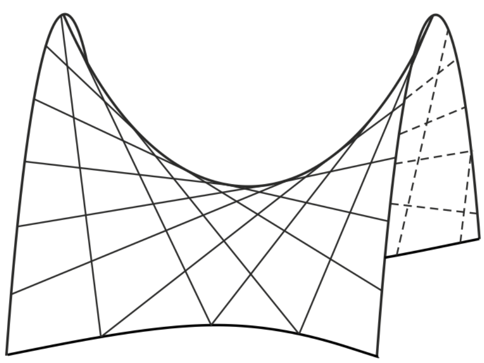
при любых $\lambda_1,\ \lambda_2$ лежат на однополостном гиперболоиде $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, поэтому однополостный гиперболоид имеет два семейства $\{l_1(\lambda_1)\}$ и $\{l_2(\lambda_2)\}$ прямолинейных образующих. Через каждую его точку проходит две прямолинейные образующие – по одой из каждого семейства.

Прямые

$$l_1(\lambda_1):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\lambda_1 z,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\lambda_1},\end{cases}\qquad l_2(\lambda_2):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda_2 z,\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\lambda_2}\end{cases}$$

при любых $\lambda_1,\ \lambda_2$ лежат на гиперболическом параболоиде $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, поэтому гиперболический параболоид имеет два семейства $\{l_1(\lambda_1)\}$ и $\{l_2(\lambda_2)\}$ прямолинейных образующих. Через каждую его точку проходит две прямолинейные образующие – по одой из каждого семейства.





ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

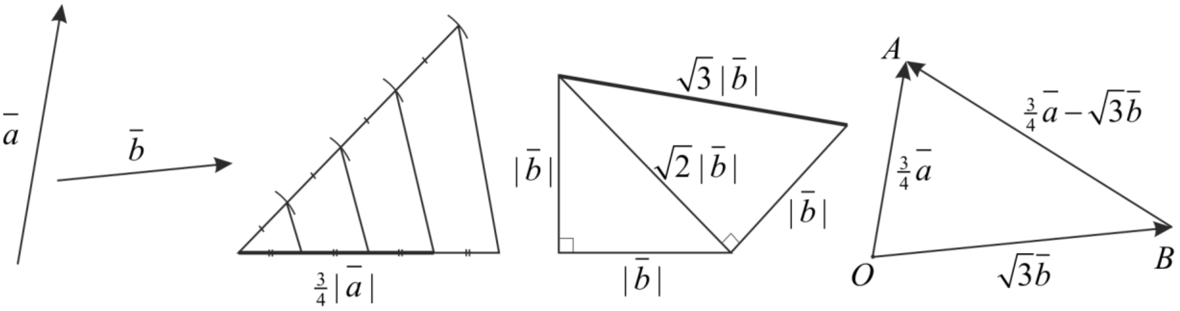
РАЗДЕЛ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Элементы векторной алгебры

1. Направленный отрезок. Понятие геометрического вектора. Сумма векторов. Произведение вектора на число

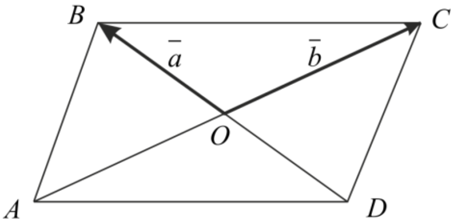
Примеры решения задач

Задача 1. Даны неколлинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. С помощью циркуля и линейки построить вектор $\frac{3}{4}\bar{a}-\sqrt{3}\bar{b}$.



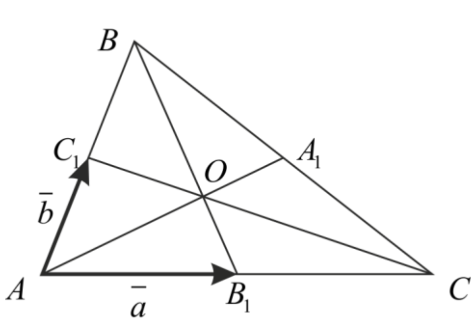
Решение. Построим отрезки длины $\frac{3}{4}|\bar{a}|$ и $\sqrt{3}\,|\bar{b}|$. Для этого воспользуемся теоремами Фалеса и спиралью Архимеда. Отложим найденные отрезки от одной точки O параллельно соответствующим векторам, получим векторы $\overline{OA}=\frac{3}{4}\bar{a}$ и $\overline{OB}=\sqrt{3}\bar{b}$. По правилу вычитания векторов $\overline{BA}=\frac{3}{4}\bar{a}-\sqrt{3}\bar{b}$.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей, $\bar{a}=\overline{AB},\ \bar{b}=\overline{AD}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{OD}$, $\overline{DC}$.



Решение. По правилу вычитания векторов $\overline{BC}=\bar{b}-\bar{a}$. Так как в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, получим $\overline{CA}=-2\bar{b}$, $\overline{OD}=-\bar{a}$. И, наконец, $\overline{DC}=\overline{DO}+\overline{OC}=\bar{a}+\bar{b}$.

Задача 3. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.



Решение. Обозначим $\bar{a}=\overline{AB_1},\ \bar{b}=\overline{AC_1}$. Тогда

$\overline{OA}=-\frac{2}{3}\overline{AA_1}=-\frac{2}{3}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$,

$\overline{OB}=\frac{2}{3}\overline{B_1B}=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}-\overline{AB_1}\right)=\frac{2}{3}\left(2\bar{b}-\bar{a}\right)$,

$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{C_1C}=\frac{2}{3}\left(\overline{AC}-\overline{AC_1}\right)=\frac{2}{3}\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)$.

Таким образом,

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=-\frac{2}{3}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\frac{2}{3}\left(2\bar{b}-\bar{a}\right)+\frac{2}{3}\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)=\frac{2}{3}\left(2\bar{b}-\bar{a}+2\bar{a}-\bar{b}-\bar{a}-\bar{b}\right)=\bar{0}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Пусть $\bar{b}=\alpha\bar{a},\ \alpha>0,\ \bar{c}=\beta\bar{a},\ \beta<0.$ Выразить α и β через длины соответствующих векторов.

1.2. Доказать, что ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны т. и т. т., когда $\bar{b}=\alpha\bar{a}$.

1.3. Даны неколлинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. С помощью циркуля и линейки построить векторы

а) $\bar{a}+\dfrac{1}{2}\bar{b}$; б) $\bar{b}-2\bar{a}$; в) $\dfrac{2}{5}\bar{b}-\sqrt{3}\bar{a}$; г) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\bar{a}+\dfrac{4}{3}\bar{b}$.

1.4. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – неколлинеарные векторы. Доказать, что любой вектор плоскости $\bar{c}$ можно представить в виде $\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$, причем коэффициенты α и β определены однозначно.

1.5. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $\bar{a}=\overline{AC},\ \bar{b}=\overline{BD}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

1.6. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей, $\bar{a}=\overline{AB},\ \bar{b}=\overline{AD}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{OA}$.

1.7. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\bar{a}=\overline{AB_1},\ \bar{b}=\overline{AC_1}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$.

1.8. В треугольнике ABC сторона BC делится точкой D в отношении $m:n$. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\bar{a}=\overline{AB}$ и $\bar{b}=\overline{AC}$.

1.9. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}.$

1.10. В треугольнике ABC точки A_1,B_1,C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Доказать, что $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\bar{0}.$

1.11. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Доказать, что $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right).$

2. Линейная зависимость и независимость векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Система векторов $\bar{b},\bar{c},\bar{e}$ линейно зависима. Доказать, что система $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e}$ тоже линейно зависима.

Решение. По определению линейной зависимости один из векторов системы $\bar{b},\bar{c},\bar{e}$ линейно выражается через остальные. Не ограничивая общность рассуждений, будем считать, что это вектор $\bar{b}$. Тогда существуют числа α_1,α_2, что $\bar{b}=\alpha_1\bar{c}+\alpha_2\bar{e}$. Переписав это равенство в виде $\bar{b}=0\cdot\bar{a}+\alpha_1\bar{c}+0\cdot\bar{d}+\alpha_2\bar{e}$, получим, что вектор $\bar{b}$ линейно выражается через остальные векторы системы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e}$, следовательно, эта система линейно зависима по определению.

Задача 2. Доказать, что если система векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ линейно независима, то система $\bar{a}-3\bar{b},2\bar{a}+\bar{c},\ \bar{b}-\bar{c}$ также линейно независима.

Решение. От противного, допустим, что система $\overline{a}-3\overline{b}, 2\overline{a}+\overline{c}, \overline{b}-\overline{c}$ линейно зависима, тогда по критерию линейной зависимости существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство

$$\alpha_1\left(\overline{a}-3\overline{b}\right)+\alpha_2\left(2\overline{a}+\overline{c}\right)+\alpha_3\left(\overline{b}-\overline{c}\right)=\overline{0}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные при $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$

$$\left(\alpha_1+2\alpha_2\right)\overline{a}+\left(\alpha_3-3\alpha_1\right)\overline{b}+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\overline{c}=\overline{0}.$$

Система векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независима, поэтому, согласно критерию линейной независимости, последнее равенство может иметь место лишь в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0,\\ \alpha_3-3\alpha_1=0,\\ \alpha_2-\alpha_3=0,\end{cases}$$

решая которую находим $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, что противоречит предположению.

Задача 3. При каких $x\in\mathbb{R}$ система строк $\left(-2x,-1,4\right)$, $\left(-1,0,-x\right)$, $\left(0,x,6\right)$ линейно зависима?

Решение. Система строк линейно зависима т. и т. т., когда существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство

$$\alpha_1\left(-2x,-1,4\right)+\alpha_2\left(-1,0,-x\right)+\alpha_3\left(0,x,6\right)=\left(0,0,0\right).$$

По определению умножения строки на число, сложения строк и равенства строк получим

$$\left(-2x\alpha_1,-\alpha_1,4\alpha_1\right)+\alpha_2\left(-\alpha_2,0,-x\alpha_2\right)+\left(0,x\alpha_3,6\alpha_3\right)=\left(0,0,0\right),$$

$$\left(-2x\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1+x\alpha_3,4\alpha_1-x\alpha_2+6\alpha_3\right)=\left(0,0,0\right),$$

$$\begin{cases}-2x\alpha_1-\alpha_2=0,\\ -\alpha_1+x\alpha_3=0,\\ 4\alpha_1-x\alpha_2+6\alpha_3=0.\end{cases}$$

Необходимо найти такие значения x, при которых эта система имеет нетривиальные решения относительно $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Выражая α_2 и α_3 из первого и второго уравнений через α_1 и подставляя полученные выражения в третье уравнение, получим

$$4\alpha_1+2x^2\alpha_1+\frac{6\alpha_1}{x}=0,$$

$$\frac{\alpha_1}{x}\left(x^3+2x+3\right)=0.$$

Проверив, что при $\alpha_1=0$ или $x=0$ система будет иметь только тривиальное решение, заключаем, что искомыми значениями x будут лишь корни уравнения $x^3+2x+3=0.$ Решая его, находим единственное решение $x=-1$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

2.2. Доказать, что любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

2.3. Доказать, что любая система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2.4. Доказать, что если система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ линейно независима, а система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}, \overline{b}$ – линейно зависима, то вектор $\overline{b}$ линейно выражается через векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$.

2.5. Доказать, что если система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независима, то система $\overline{a}+\overline{b},\ \overline{a}-2\overline{c},\ \overline{b}+\overline{c}$ также линейно независима.

2.6. При каких $x \in \mathbb{R}$ система строк $(1+x, 1-x), (1-x, 1+x)$ линейно зависима?

2.7. При каких $x \in \mathbb{R}$ система строк $(x,1,0),\ (1,x,1),\ (0,1,x)$ линейно зависима?

2.8. Проверить линейную зависимость систем строк

а) $(-2,1), (1,-1)$;

б) $(1,1,0), (1,-2,3), (-5,1,0)$;

в) $(2,0,-3), (-1,-2,4), (0,-4,2)$.

2.9. Доказать, что система из двух геометрических векторов линейно зависима т. и т. т., когда эти векторы коллинеарны.

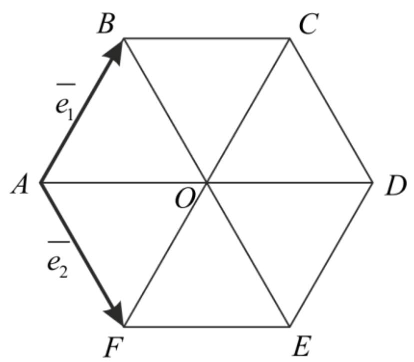
2.10. Доказать, что любая система из трех геометрических векторов плоскости линейно зависима.

2.11. Доказать, что система из трех геометрических векторов пространства линейно зависима т. и т. т., когда эти векторы компланарны.

3. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе

Примеры решения задач

Задача 1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1}=\overline{AB}$, $\overline{e_2}=\overline{AF}$. Найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{BE}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.



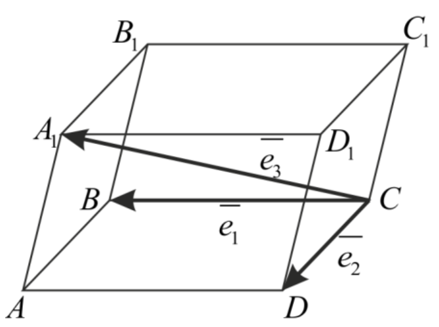
Решение. $\overline{BC}=\overline{AO}=\overline{e_1}+\overline{e_2},\ \overline{BC}(1,1)$.

$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=2\overline{BC}-\overline{AB}=2\left(\overline{e_1}+\overline{e_2}\right)-\overline{e_1}=\overline{e_1}+2\overline{e_2},\ \overline{BD}(1,2)$.

$\overline{BF}=\overline{AF}-\overline{AB}=\overline{e_2}-\overline{e_1},\ \overline{BF}(-1,1)$.

$\overline{BE}=2\overline{AF}=2\overline{e_2},\ \overline{BE}(0,2)$.

Задача 2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1}=\overline{CB}$, $\overline{e_2}=\overline{CD}$, $\overline{e_3}=\overline{CA_1}$. Найти координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{D_1B}$, $\overline{AA_1}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.



Решение. $\overline{AD}=-\overline{CB}=-\overline{e_1},\ \overline{AD}(-1,0,0)$.

$\overline{AC}=-\overline{CA}=-\left(\overline{CB}+\overline{CD}\right)=-\overline{e_1}-\overline{e_2},\ \overline{AC}(-1,-1,0)$.

$\overline{B_1C}=\overline{B_1A_1}+\overline{A_1C}=\overline{e_2}-\overline{e_3},\ \overline{B_1C}(0,1,-1)$.

$\overline{D_1B}=\overline{D_1A_1}+\overline{A_1B}=\overline{D_1A_1}+\overline{CB}-\overline{CA_1}=\overline{e_1}+\overline{e_1}-\overline{e_3}=2\overline{e_1}-\overline{e_3}$,

$\overline{D_1B}(2,0,-1)$. $\overline{AA_1}=\overline{AB}+\overline{BA_1}=\overline{AB}+\overline{CA_1}-\overline{CB}=-\overline{e_2}+\overline{e_3}-\overline{e_1}, \overline{AA_1}(-1,-1,1)$.

Задача 3. Доказать, что система строк $\overline{e_1} = (1,-2,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,-1)$, $\overline{e_3} = (3,0,2)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\overline{a} = (5,-5,3)$ в этом базисе.

Решение. Докажем сначала, что система $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ линейно независима. От противного, пусть система линейно зависима, тогда существуют одновременно не равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} = \overline{0},$$

$$\alpha_1 (1,-2,0) + \alpha_2 (0,1,-1) + \alpha_3 (3,0,2) = (0,0,0),$$

$$(\alpha_1 + 3\alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0),$$

отсюда получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, система $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ линейно независима, а так как $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, т.е. количество векторов в системе совпадает с размерностью векторного пространства, то эта система образует базис в $\mathbb{R}^3$.

Пусть строка $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ имеет координаты $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда

$$a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + a_3 \overline{e_3} = \overline{a},$$

$$a_1 (1,-2,0) + a_2 (0,1,-1) + a_3 (3,0,2) = (5,-5,3),$$

$$(a_1 + 3a_3, -2a_1 + a_2, -a_2 + 2a_3) = (5,-5,3),$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_3 = 5, \\ -2a_1 + a_2 = -5, \\ -a_2 + 2a_3 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 1$, поэтому $\overline{a}(2,-1,1)$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Доказать, что любая система из $n+1$ вектора в n-мерном векторном пространстве линейно зависима.

3.2. Доказать, что если $\dim V = n$ и $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ – линейно независимая система векторов из пространства V, то она образует базис в V.

3.3. В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей. Доказать, что векторы $\overline{e_1} = \overline{AB}$ и $\overline{e_2} = \overline{AD}$ образуют базис векторов плоскости и найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$ в этом базисе.

3.4. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\overline{e_1} = \overline{CB_1}$, $\overline{e_2} = \overline{CO}$. Найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BC}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

3.5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AC}$. Найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{BE}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

3.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1} = \overline{A_1C}$, $\overline{e_2} = \overline{D_1B}$, $\overline{e_3} = \overline{C_1B}$. Доказать, что $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ – базис векторов пространства и найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{A_1A}$, $\overline{CB_1}$ в этом базисе.

3.7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AC}$, $\overline{e_3} = \overline{AA_1}$. Найти координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{A_1D}$, $\overline{D_1B}$, $\overline{AC_1}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

3.8. Пусть $\overline{e_1} = (-2,1)$, $\overline{e_2} = (1,-1)$, $\overline{a} = (0,-3)$. Доказать, что строки $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

3.9. Доказать, что система строк $\overline{e_1} = (2,1,-3)$, $\overline{e_2} = (3,2,-5)$, $\overline{e_3} = (1,-1,1)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\overline{a} = (4,-2,1)$ в этом базисе.

4. Скалярное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Какой угол образуют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 1$, а векторы $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} + 3\overline{b}$ ортогональны.

Решение. По условию ортогональности векторов $\overline{c} \perp \overline{d} \Leftrightarrow \overline{c}\overline{d} = 0$, согласно свойствам скалярного произведения будем иметь

$$\left(2\overline{a} - \overline{b}\right)\left(\overline{a} + 3\overline{b}\right) = 2\overline{a}^2 + 5\overline{a}\overline{b} - 3\overline{b}^2 = 2|\overline{a}|^2 + 5\overline{a}\overline{b} - 3|\overline{b}|^2 = 0,$$

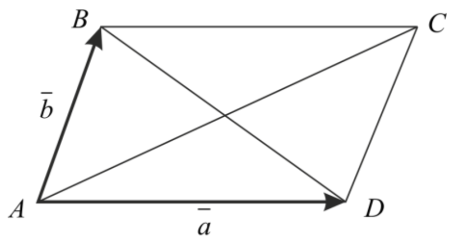
отсюда

$$5\overline{a}\overline{b} = 3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2,$$

$$5|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2,$$

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{3|\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}|^2}{5|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{3-4}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}},$$

и, следовательно, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.



Задача 2. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

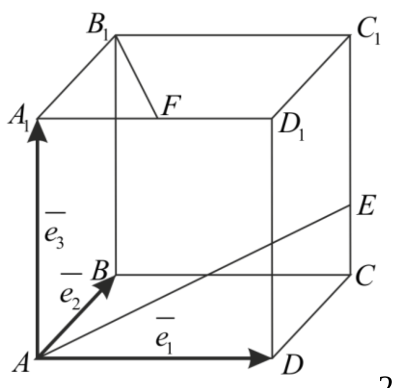
Решение. Обозначим $\overline{a} = \overline{AD}, \overline{b} = \overline{AB}$. Тогда $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{BD} = \overline{a} - \overline{b}$. По свойству скалярного квадрата $\overline{x}^2 = |\overline{x}|^2$, поэтому

$$2AD^2 + 2AB^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2 = 2\overline{a}^2 + 2\overline{b}^2,$$

$$AC^2 + BD^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \left(\overline{a} + \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} - \overline{b}\right)^2 =$$

$$= \overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 + \overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 = 2\overline{a}^2 + 2\overline{b}^2,$$

что и требовалось доказать.



Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F делят ребра CC_1 и A_1D_1 в отношениях 1:2 и 1:1 соответственно. Найти угол между прямыми AE и B_1F.

Решение. Введем ортонормированный базис $\overline{e}_1=\overline{AD}$, $\overline{e}_2=\overline{AB}$, $\overline{e}_3=\overline{AA_1}$. Найдем координаты векторов $\overline{AE}$ и $\overline{B_1F}$ в этом базисе.

$$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AD}+\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{CC_1}=\overline{e}_1+\overline{e}_2+\frac{1}{3}\overline{e}_3,\ \overline{AE}\left(1,1,\frac{1}{3}\right),$$

$$\overline{B_1F}=\overline{B_1A_1}+\overline{A_1F}=-\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_1,\ \overline{B_1F}\left(\frac{1}{2},-1,0\right).$$

По определению скалярного произведения и правилам вычисления скалярного произведения и длины вектора в ортонормированном базисе будем иметь

$$\cos(\widehat{\overline{AE},\overline{B_1F}})=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{B_1F}}{\left|\overline{AE}\right|\left|\overline{B_1F}\right|}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2+(\frac{1}{3})^2}\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{95}}{6}}=\frac{-3}{\sqrt{95}},$$

отсюда $(\widehat{\overline{AE},\overline{B_1F}})=\arccos\frac{-3}{\sqrt{95}}=\pi-\arccos\frac{3}{\sqrt{95}}$, угол между векторами оказался тупым. Угол между прямыми – это наименьший из смежных углов, образованных при их пересечении, поэтому $(\widehat{AE,B_1F})=\pi-(\widehat{\overline{AE},\overline{B_1F}})=\arccos\frac{3}{\sqrt{95}}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Доказать, что ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны т.и т. т., когда $\overline{a}\overline{b}=0$.

4.2. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{c}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{d}=5\overline{a}-4\overline{b}$ ортогональны.

4.3. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

4.4. Доказать теорему косинусов.

4.5. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ $AB\perp CD$ и $BC\perp AD$, то $AC\perp BD$.

4.6. В треугольнике ABC $AB=7, BC=5, AC=6$. Найти $\overline{BA}\cdot\overline{BC}$.

4.7. В ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ $\overline{e}_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_3\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Проверить, образуют ли $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ ортонормированный базис.

4.8. Найти координаты вектора $\overline{a}$ в ортонормированном базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, если известно, что $\left|\overline{a}\right|=4$ и он образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ углы $60°$ и $45°$.

4.9. Вектор $\overline{a}$ образует с векторами $\overline{i}$ и $\overline{j}$ ортонормированного базиса $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ углы $120°$ и $135°$. Какой угол образует $\overline{a}$ с вектором $\overline{k}$?

4.10. Вектор $\overline{a}$ образует с векторами ортонормированного базиса $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ углы α и β и γ. Доказать, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4.11. Найти угол между равными сторонами равнобедренного треугольника, если его медианы, проведенные из концов основания, перпендикулярны.

4.12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – центр грани AA_1B_1B. Найти угол между прямыми DE и BD_1.

4.13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания, точка E – середина ребра SA. Найти угол между прямыми SD и BE.

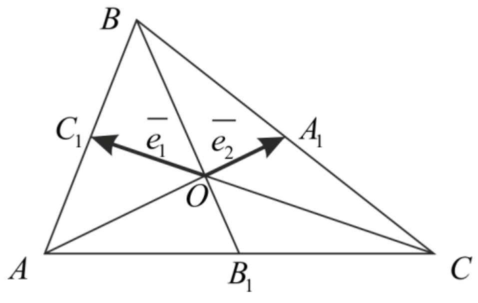
4.14. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Метод координат на плоскости

5. Аффинная система координат на плоскости

Примеры решения задач

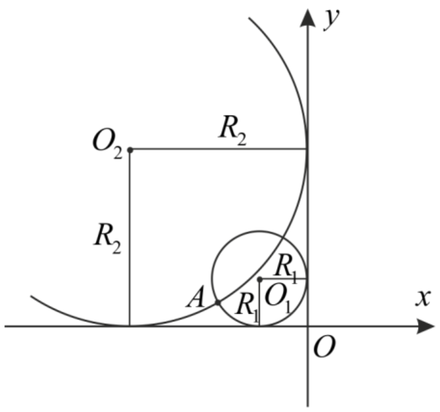
Задача 1. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, $\overline{e}_1 = \overline{OC_1}$, $\overline{e}_2 = \overline{OA_1}$. Найти координаты вершин треугольника в системе координат $O, \overline{e}_1, \overline{e}_2$.



Решение. Точка A имеет те же координаты, что и ее радиус-вектор $\overline{OA}$. $\overline{OA} = -2\overline{OA_1} = -2\overline{e}_2$, $\overline{OA}(0,-2)$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, поэтому $A(0,-2)$ в системе координат $O, \overline{e}_1, \overline{e}_2$.

Аналогично $\overline{OC} = -2\overline{OC_1} = -2\overline{e}_1$, $\overline{OC}(-2,0)$, $C(-2,0)$, $\overline{OB} = -2\overline{OB_1} = -2 \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right) = -\left(-2\overline{e}_2 - 2\overline{e}_1\right) = 2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{OB}(2,2)$, $B(2,2)$.

Задача 2. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(-8,4)$ и касающейся осей декартовой системы координат.

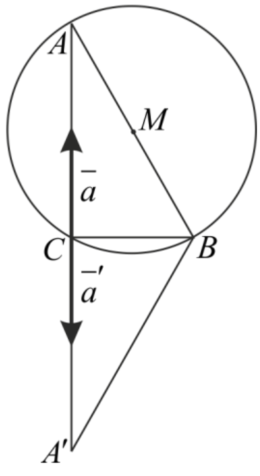


Решение. Искомых окружностей, очевидно, две. Если их радиусы R_1 и R_2, то центры будут иметь координаты $O_1\left(-R_1, R_1\right)$, $O_2\left(-R_2, R_2\right)$. Расстояния от центров до точки A равны радиусам, поэтому будет верным равенство

$$\sqrt{\left(-R_{1,2}+8\right)^2 + \left(R_{1,2}-4\right)^2} = R_{1,2}.$$

Решая это уравнение, найдем $R_1 = 4, R_2 = 20$, значит, искомые уравнения имеют вид $\left(x+4\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 16$, $\left(x+20\right)^2 + \left(y-20\right)^2 = 400$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет CA вдвое больше катета CB. Точки B и C заданы своими декартовыми координатами $B\left(3,-1\right), C\left(-1,1\right)$. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.



Решение. Зададим векторы $\overline{a}$ и $\overline{a}'$, равные по длине вектору $\overline{CB}$ и ортогональные $\overline{CB}$. Так как $\overline{CB}\left(4,-2\right)$, то $\overline{a}\left(2,4\right)$, $\overline{a}'\left(-2,-4\right)$. Задача имеет, очевидно, два решения: в первом случае $\overline{CA} = 2\overline{a}$, во втором $\overline{CA'} = 2\overline{a}'$. Ограничимся первым случаем, во втором решение полностью аналогично. Чтобы найти точку A, необходимо сместить точку C на вектор $\overline{CA} = 2\overline{a}$, $\overline{CA}\left(4,8\right)$. Получим $A\left(-1+4, 1+8\right)$, $A\left(3,9\right)$. Центр описанной окружности – точка M – находится на середине гипотенузы AB, поэтому $M\left(\frac{3+3}{2}, \frac{9-1}{2}\right), M\left(3,4\right)$. Радиус окружности равен $MA = \sqrt{\left(3-3\right)^2 + \left(9-4\right)^2} = 5$. Следовательно, окружность задается уравнением $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Дана аффинная система координат на плоскости. Построить точки $A(1,0),\ B(-2,0),\ C(-3,1)$ по их координатам в этой системе координат.

5.2. Даны вершины $A(-1,3),\ B(2,-5),\ C(0,4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

5.3. Найти координаты точки A', симметричной точке $A(-1,5)$ относительно точки $B(3,2)$.

5.4. Даны координаты середин сторон треугольника ABC $A_1(2,4), B_1(-3,0), C_1(2,1)$. Найти координаты вершин треугольника ABC.

5.5. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если $A(a_1,a_2),\ B(b_1,b_2),\ C(c_1,c_2)$.

5.6. По данным точкам A и B построить такую точку C, что $(ABC)=-\frac{2}{3}$.

5.7. Пусть в некоторой аффинной системе координат $A(2,3), B(-1,2)$. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $3:5$.

5.8. В некоторой аффинной системе координат $A(1,1), B(2,3), C(5,0), D(7,-5)$. Проверить, является ли $ABCD$ трапецией.

5.9. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-4,4), B(2,0)$ и точка пересечения диагоналей $O(2,2)$. Найти координаты двух других вершин.

5.10. Известны аффинные координаты точек $A(-1,7), B(5,5), C(7,-5), D(3,-7)$. Проверить, что четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$, есть параллелограмм.

5.11. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1}=\overline{BC}$, $\overline{e_2}=\overline{BD}$. Найти координаты вершин шестиугольника в системе координат $B, \overline{e_1}, \overline{e_2}$.

5.12. Даны вершины $A(3,-1)$ и $B(1,4)$ треугольника ABC и точка пересечения медиан $K(0,2)$. Найти координаты третьей вершины.

5.13. Даны декартовы координаты вершин $A(5,-4),\ B(-1,2),\ C(5,1)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

5.14. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $B(10,9)$ и касающейся оси Ox декартовой системы координат Oxy в точке $A(7,0)$.

5.15. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(-8,4)$ и касающейся осей декартовой системы координат.

5.16. Известны декартовы координаты смежных вершин $A(-2,1)$ и $B(3,3)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты двух других вершин.

5.17. Даны декартовы координаты вершин $A(-3,2)$ и $B(1,4)$ правильного треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

5.18. Найти точку на расстоянии $\sqrt{50}$ от начала декартовой системы координат и равноудаленную от точек $A(2,3)$ и $B(5,6)$.

6. Формулы преобразования координат векторов и точек плоскости

Примеры решения задач

Задача 1. Даны базисы $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) и $\overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2), причем $\overline{e_1}'(2,-1), \overline{e_2}'(-3,1)$ в базисе (1).

а) Записать формулы преобразования координат векторов плоскости при переходе от (1) к (2) и наоборот.

б) Найти координаты старых векторов в новом базисе.

в) Найти старые координаты вектора $\overline{a}$ и новые координаты вектора $\overline{b}$, если $\overline{a}(5,-2)$ в базисе (2), $\overline{b}(-3,4)$ в базисе (1).

Решение. а) Матрица перехода от старого базиса к новому будет иметь вид

$$T=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

в соответствии с ней запишем формулы преобразования координат векторов

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - 3x_2', \\ x_2 = -x_1' + x_2'. \end{cases} \qquad (3)$$

Решая эту систему относительно x_1', x_1', найдем формулы преобразования координат векторов при переходе от нового базиса к старому

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2, \\ x_2' = -x_1 - 2x_2. \end{cases} \qquad (4)$$

б) На основании формул (4) заключаем, что $\overline{e_1}(-1,-1), \overline{e_2}(-3,-2)$ в базисе (2).

в) Найдем старые координаты вектора $\overline{a}$ с помощью формул (3)

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot 4 - 3\cdot 2, \\ x_2 = -4 + 2, \end{cases}$$

отсюда $\overline{a}(2,-2)$ в базисе (1). Для нахождения новых координат вектора $\overline{b}$ воспользуемся формулами (4)

$$\begin{cases} x_1' = -(-5) - 3\cdot 1, \\ x_2' = -(-5) - 2\cdot 1, \end{cases}$$

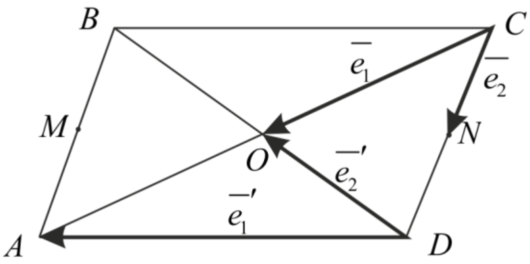
$\overline{b}(2,3)$ в базисе (2).

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, $\overline{e_1}=\overline{CO}$, $\overline{e_2}=\overline{CN}$, $\overline{e_1}'=\overline{DA}$, $\overline{e_2}'=\overline{DO}$.

а) Записать формулы преобразования координат точек при переходе от репера $C, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ к реперу $D, \overline{e_1}', \overline{e_2}'$.

б) Найти новые координаты точки M, а затем с помощью формул перехода – старые координаты этой точки.

Решение. а) Пусть $C, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ (1) – старая система координат, $D, \overline{e_1}', \overline{e_2}'$ (2) – новая система координат. Найдем координаты новых базисных векторов и начала новой системы координат в старой системе координат.



$\overline{e_1}' = \overline{CA} - \overline{CD} = 2\overline{e_1} - 2\overline{e_2}$, $\overline{e_1}'(2,-2)$ в с.к. (1).

$\overline{e_2}' = \overline{CO} - \overline{CD} = \overline{e_1} - 2\overline{e_2},\ \overline{e_1}'\left(1,-2\right)$ в с.к. (1). Матрица перехода будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения старых координат начала новой с. к. найдем ее радиус-вектор $\overline{CD} = 2\overline{e_2},\ \overline{CD}\left(0,2\right)$ в с.к. (1). Значит, $D\left(0,2\right)$ в с.к. (1).

Запишем формулы преобразования координат точек при переходе от репера (1) к реперу (2)

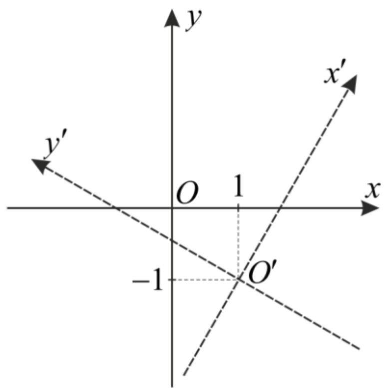
$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' + x_2', \\ x_2 = -2x_1' - 2x_2' + 2. \end{cases}$$

б) Для нахождения новых координат точки M найдем ее радиус-вектор $\overline{DM} = \overline{DO} + \overline{OM} = \overline{DO} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \overline{e_2}' + \frac{1}{2}\overline{e_1}',\ \overline{DM}\left(\frac{1}{2},1\right),\ M\left(\frac{1}{2},1\right)$ в с.к. (2). Старые координаты точки M найдем с помощью формул перехода

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot\frac{1}{2} + 1, \\ x_2 = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 + 2, \end{cases}$$

$M\left(2,-1\right)$ в с.к. (1).

Задача 3. Новая система координат получена из декартовой системы координат переносом начала координат в точку $O'\left(1,-1\right)$ и поворотом на угол $60°$. Известно уравнение кривой $\gamma: -\sqrt{3}x^2 - 2xy + \sqrt{3}y^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)x + 2\left(\sqrt{3}+1\right)y - 2 = 0$ в исходных координатах. Найти уравнение γ в новом репере.



Решение. Запишем формулы перехода от старого репера к новому

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1. \end{cases}$$

Заменяя x и y в уравнении γ с помощью формул перехода, получим уравнение γ в новом репере

$$-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right)y + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right)^2 +$$

$$+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1\right) + 2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right) - 2 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим после некоторых подсчетов $\gamma: x'y' = 1$ или $\gamma: y' = \frac{1}{x'}$. Таким образом, γ – гипербола.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Записать формулы преобразования координат векторов плоскости, если даны старые координаты новых базисных векторов

а) $\overline{e_1}'(2,-1), \overline{e_2}'(3,7)$; б) $\overline{e_1}'(0,-2), \overline{e_2}'(3,0)$.

6.2. Пусть $\overline{e_1},\overline{e_2}$ и $\overline{e_1}',\overline{e_2}'$ – два базиса векторов плоскости, для которых формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2', \\ x_2 = -5x_1' + 3x_2'. \end{cases}$$

Найти координаты $\overline{e_1}'$ и $\overline{e_2}'$ в базисе $\overline{e_1},\overline{e_2}$.

6.3. Пусть старые и новые координаты векторов плоскости связаны формулами

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - 3x_2', \\ x_2 = x_1' + 5x_2'. \end{cases}$$

Найти

а) старые координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известны их новые координаты $\overline{a}(5,-2)$, $\overline{b}(-3,4)$;

б) новые координаты векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$, если известны их старые координаты $\overline{c}(2,1)$, $\overline{d}(1,1)$.

6.4. Пусть старые координаты векторов выражаются через их новые координаты по формулам

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' + 5x_2', \\ x_2 = x_1' + 3x_2'. \end{cases}$$

Найти формулы, по которым новые координаты выражаются через старые.

6.5. Пусть в старом базисе $\overline{a}(4,5)$, $\overline{b}(0,3)$, а в новом базисе $\overline{a}(3,-1)$, $\overline{b}(1,1)$. Записать формулы преобразования координат векторов.

6.6. Записать формулы преобразования координат точек плоскости, если даны старые координаты новых базисных векторов $\overline{e_1}'(4,3), \overline{e_2}'(0,5)$ и нового начала координат $O(3,-2)$. Найти старые координаты точки M, если известны ее новые координаты $M(2,-3)$. Найти новые координаты точки N, если известны ее старые координаты $N(0,-1)$.

6.7. Найти точку M, имеющие одни и те же координаты в реперах $O,\overline{e_1},\overline{e_2}$ (1) и $O',\overline{e_1}',\overline{e_2}'$ (2), если $\overline{e_1}'(1,3), \overline{e_2}'(-2,1), O'(2,-3)$ в репере (1).

6.8. В старой системе координат $A(1,1), B(5,6), C(1,4)$, в новой системе координат $A(0,1), B(3,0), C(1,2)$. Записать формулы преобразования координат.

6.9. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, M – середина OC. Записать формулы преобразования координат точек при переходе от репера $A,\overline{AB},\overline{AC}$ к реперу $O,\overline{OB},\overline{OC}$. Найти старые и новые координаты точки M, выполнить проверку с помощью формул перехода.

6.10. Центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ находится в точке O, $\overline{e_1} = \overline{FB}, \overline{e_2} = \overline{FO}$, $\overline{e_1}' = \overline{CB}, \overline{e_2}' = \overline{CD}$. Записать формулы преобразования координат векторов и точек плоскости, полагая, что начала старого и нового реперов находятся в точках F и C.

6.11. Пусть в декартовой системе координат Oxy кривая γ задается уравнением $y^2 = 4x$. Записать уравнение γ в новой системе координат, которая получена из старой переносом начала координат в точку $O'(1,0)$.

6.12. Новая система координат получена из декартовой системы координат поворотом на угол α. Известно уравнение кривой γ в исходных координатах. Найти ее уравнение в новом репере, если

а) $\gamma : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0,\ \alpha = 45°$; б) $\gamma : x^2 - y^2 = a^2,\ \alpha = -45°$.

6.13. Новая декартова система координат получена из старой переносом начала координат в точку $O'(1,-3)$ и поворотом на такой угол α, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$. В новых координатах $A(3,1),\ B(1,2),\ C(-3,4)$. Найти старые координаты этих точек.

6.14. Известны декартовы координаты точек $A(-2,5),\ B(-6,1),\ C(0,3)$. Найти их координаты в новой системе координат, если оси повернуты на угол $\alpha = 45°$, а начало координат перенесено в точку $O'(-2,3)$.

Прямая на координатной плоскости

7. Уравнение прямой в аффинной системе координат

Примеры решения задач

Задача 1. В некоторой аффинной системе координат точки A и B имеют координаты $A(-2,4)$ и $B(1,-1)$.

а) Составить каноническое и общее уравнение прямой AB, найти ее параметрическое представление.

б) Лежат ли на этой прямой точки $C(4,-6)$ и $D(0,2)$?

в) Указать еще какие-нибудь точки этой прямой.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}(3,-5)$ будет направляющим вектором прямой AB. Составим каноническое уравнение прямой по точке $B(1,-1)$ и направляющему вектору $\overline{AB}$

$$AB : B, \overline{AB},\ \ AB : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-5}.$$

Из канонического уравнения легко получить общее уравнение

$$AB : -5(x-1) = 3(y+1),$$

$$AB : 5x + 3y - 2 = 0.$$

Параметрическое представление будет иметь вид

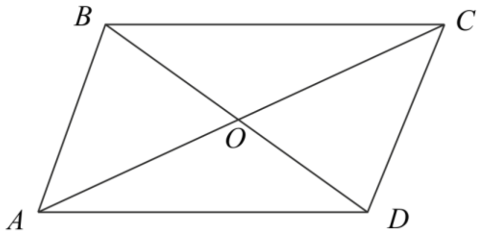
$$AB : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 - 5t. \end{cases}$$

б) Подставим координаты точки C в общее уравнение прямой, получим верное равенство $5\cdot 4 + 3(-6) - 2 = 0$, поэтому точка C лежит на прямой AB. Так как $5\cdot 0 + 3\cdot 2 - 2 \neq 0$, то точка D не лежит на AB.

в) Необходимо подобрать такие координаты, которые бы удовлетворяли уравнению прямой AB. Удобнее всего это делать с помощью параметрического представления.

Возьмем, например, $t=2$, получим $x=1+3\cdot 2=7$, $y=-1-5\cdot 2=-11$, т.е. точка с координатами $(7,-11)$ лежит на AB. При $t=-3$ получим точку с координатами $(-8,14)$.

Задача 2. Даны уравнения $AD: x-2y-3=0$, $CD: 2x-y=0$ двух смежных сторон параллелограмма $ABCD$ и координаты точки пересечения его диагоналей $O(2,-3)$. Составить уравнения сторон AB и BC.



Решение. Так как $D=AD\cap CD$, составляя систему из уравнений прямых AD и CD и решая ее, найдем координаты точки D

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Т. о., $D(-1,-2)$. Точку B можно найти смещением точки O на вектор $\overline{OB}$. Но $\overline{OB}=\overline{DO}$, $\overline{DO}(3,-1)$, поэтому $O(2+3,-3+(-1))$, $O(5,-4)$. Из уравнения прямой AD найдем ее направляющий вектор $\overline{a_1}(2,1)$, он будет направляющим и для прямой BC, поскольку $AD \parallel BC$. Зададим каноническое уравнение прямой BC по точке B и направляющему вектору $\overline{a_1}$

$$BC: B,\overline{a_1},\quad BC: \frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{1},\quad BC: x-2y-13=0.$$

Аналогично зададим уравнение прямой AB по точке B и направляющему вектору $\overline{a_2}(1,2)$ прямой CD

$$AB: B,\overline{a_2},\quad AB: \frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{2},\quad AB: 2x-y-14=0.$$

Задача 3. Прямая $l_1: x-2y-6=0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B соответственно. Определить, какие стороны треугольника AOB пересекает прямая $l_2: 2x+3y-4=0$.

Решение. Координаты точек A и B удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x-2y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} x-2y-6=0 \\ x=0 \end{cases}$$

соответственно, отсюда находим $A(6,0)$, $B(0,-3)$. Выясним, как расположены точки O, A, B относительно прямой l_2. Для этого найдем числа $\alpha_O=2\cdot 0+3\cdot 0-4=-4<0$, $\alpha_A=6\cdot 0+3\cdot 0-4=2>0$, $\alpha_B=2\cdot 0+3\cdot(-3)-4=-13<0$. Следовательно, точки O и B лежат в одной полуплоскости относительно l_2, а точка A – в другой полуплоскости, поэтому прямая l_2 пересекает стороны OA и AB.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Лежат ли точки $A(-1,2)$ и $B(4,0)$ на прямой $l: x+2y-3=0$? Найти еще какую-нибудь точку этой прямой.

7.2. Найти точки пересечения прямой $l: 3x-2y-6=0$ с координатными осями.

7.3. Для прямой $l: M(-2,3)$, $\overline{a}(2,-1)$ найти

а) параметрическое представление;
б) каноническое уравнение;
в) общее уравнение.

7.4. Составить общее уравнение прямой $l: x=-2+3t,\ y=4-t$.

7.5. Составить общее уравнение прямой AB, если $A(0,-2),\ B(3,-4)$.

7.6. Найти параметрическое представление прямой $l: 4x-2y-1=0$.

7.7. Даны координаты середин сторон треугольника ABC $A_1(2,4), B_1(-3,0), C_1(2,1)$. Составить уравнения сторон треугольника.

7.8. Даны уравнения $l_1: x-y-1=0,\ l_2: x-2y=0$ двух смежных сторон параллелограмма и координаты точки пересечения его диагоналей $K(3,-1)$. Составить уравнения двух других сторон.

7.9. Через точку $M(2,-5)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок между прямыми $x-y-1=0$ и $2x-y-18=0$ делился точкой M пополам.

7.10. Через точку $M(2,-1)$ провести прямую, отрезок которой между осями координат делится точкой M пополам.

7.11. Даны уравнения $x+2y-3=0,\ x+y-2=0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x+6y-15=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

7.12. При каких значениях параметра α прямые $3\alpha x-8y+1=0$ и $(1+\alpha)x-2\alpha y=0$ параллельны.

7.13. Можно ли подобрать коэффициенты α и β, чтобы прямые $3x-2y+1=0$ и $\alpha x+\beta y-3=0$ совпадали?

7.14. Даны вершины $A(-6,3),\ B(8,10),\ C(2,-6)$ треугольника ABC и прямая $l: 2x-3y+6=0$. Определить, какие стороны треугольника пересекает прямая.

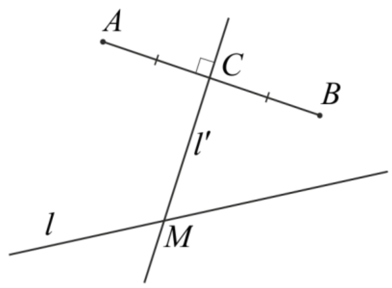
7.15. Записать аналитические условия, задающие полосу между прямыми $3x+y-1=0$ и $6x+2y+3=0$.

7.16. Доказать, что прямая $5x-y-5=0$ пересекает отрезок прямой $3x-2y-6=0$, заключенный между осями координат.

7.17. Выяснить, является ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым, если $A(2,1),\ B(-3,0)$, $C(4,-2),\ B(-1,-1)$.

8. Уравнение прямой в декартовой системе координат

Примеры решения задач



Задача 1. На прямой $l: x+4y-3=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-1,3)$ и $B(3,1)$.

Решение. Множество точек, равноудаленных от точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB, обозначим его l'. Поэтому искомая точка M находится на пересечении l и l'. Пусть C – середина отрезка AB, тогда $C\left(\frac{-1+3}{2},\frac{3+1}{2}\right)$, $C(1,2)$. Зададим уравнение l' по точке C и нормальному вектору $\overline{CB}(2,-1)$

$$l': C, \overline{CB}(\text{норм.в.}),\quad l': 2(x-1)+(-1)(y-2)=0,\quad l': 2x-y=0.$$

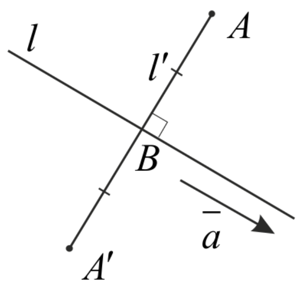
Координаты точки M найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} x+4y-3=0, \\ 2x-y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Получили $M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Задача 2. Найти точку, симметричную точке $A(-2,1)$ относительно прямой $l: 3x-2y-18=0$.

Решение. Вектор $\overline{a}(2,3)$ является направляющим вектором прямой l, а для перпендикуляра l', проведенного из точки A к прямой l, $\overline{a}$ – вектор нормали. Зададим уравнение l' по точке A и вектору нормали $\overline{a}$, $l': 2(x+2)+3(y-1)=0$, $l': 2x+3y+1=0$. Решая систему

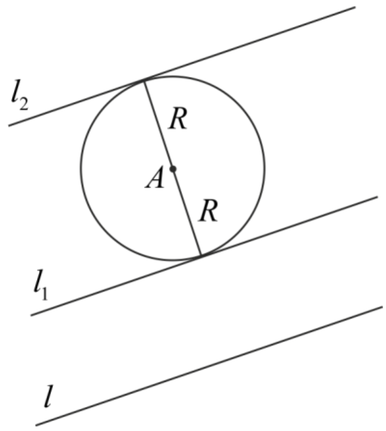


$$\begin{cases} 2x+3y+1=0, \\ 3x-2y-18=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-3, \end{cases}$$

найдем координаты точки $B(4,-3)$ – основания перпендикуляра. Поскольку $AB=BA'$, найдем искомую точку A' смещением точки B на вектор $\overline{AB}(6,-4)$. Получим $A'(10,-7)$.

Задача 3. К окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=17$ провести касательные, параллельные прямой $l: 4x-y+1=0$.

Решение. Уравнения искомых касательных l_1 и l_2 отличаются от уравнения l лишь свободным членом, т.е. имеют вид $l_{1,2}: 4x-y+D_{1,2}=0$. Расстояние от центра окружности $A(3,-2)$ до l_1 и l_2 равно радиусу, поэтому, воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой, получим уравнение



$$\rho\left(A,l_{1,2}\right)=\frac{\left|4\cdot 3-(-2)+D_{1,2}\right|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17},$$

$$\left|14+D_{1,2}\right|=17,$$

отсюда $D_1=-31$, $D_2=3$, а искомые уравнения имеют вид $l_1: 4x-y-31=0$, $l_2: 4x-y+3=0$.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. В треугольнике ABC $A(-1,5)$, $B(3,2)$, $H(5,-3)$ – точка пересечения высот. Составить уравнение стороны AC.

8.2. Точка $H(-3,2)$ – точка пересечения высот треугольника ABC, в котором $AB: 2x-y=0$, $BC: x+y-3=0$. Составить уравнение стороны AC.

8.3. Составить уравнение касательной, проведенной к окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ через точку $A(2,6)$ этой окружности.

8.4. На прямой $l: x+2y-1=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-2,5)$ и $B(0,1)$.

8.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,5)$ и равноудаленную от точек $B(3,7)$ и $C(1,-1)$.

8.6. Найти точку, симметричную точке $A(2,-5)$ относительно прямой $l: 2x+8y-15=0$.

8.7. Найти координаты точки A, лежащей на прямой $x+y+8=0$ и равноудаленной от точки $B(2,8)$ и прямой $x-3y+2=0$.

8.8. Луч света направлен по прямой $l_1: x+y+3=0$ и отражается от прямой $l_2: 3x-y+5=0$. Составить уравнение прямой, содержащей отраженный луч.

8.9. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $l_1: x-2y+2=0$ относительно прямой $l_2: 3x+y-1=0$.

8.10. Найти угол между прямыми

а) $2x+y+1=0$ и $y-x-2=0$;

б) $x=4$ и $2x-y-1=0$;

в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-4}$ и $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}$;

г) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}$ и $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{-4}$.

8.11. Найти длину высоты AH треугольника ABC, если $A(-1,2)$, $B(0,1)$, $C(-1,-3)$.

8.12. К окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=100$ провести касательные, параллельные прямой $l: 3x+4y+1=0$.

8.13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(-1,4)$ и касается окружности $(x+2)^2+(y+1)^2=25$.

8.14. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $M(-1,3)$ и касающейся прямых $7x+y=0$ и $x-y+8=0$.

8.15. Доказать, что расстояние между прямыми $l_1: Ax+By+C_1=0$ и $l_2: Ax+By+C_2=0$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

8.16. Составить уравнения сторон прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла $C(-3,4)$ и серединой гипотенузы $M(1,2)$, если известно, что точка $N(-3,3)$ лежит на гипотенузе.

8.17. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: x-7y-1=0$ и $l_2: x+y+7=0$.

8.18. В треугольнике ABC $A(20,1)$, $B(-16,0)$, $C(-8,-6)$. Составить уравнения вписанной и описанной окружностей.

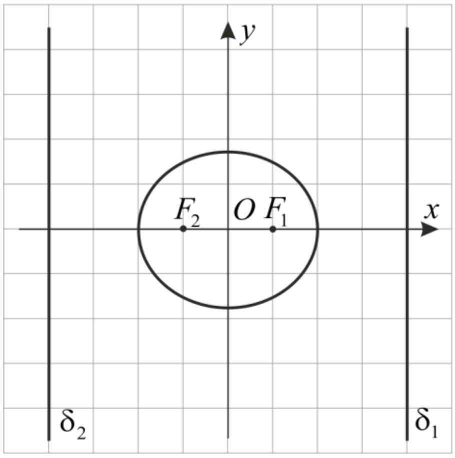
Линии второго порядка

9. Конические сечения

Примеры решения задач

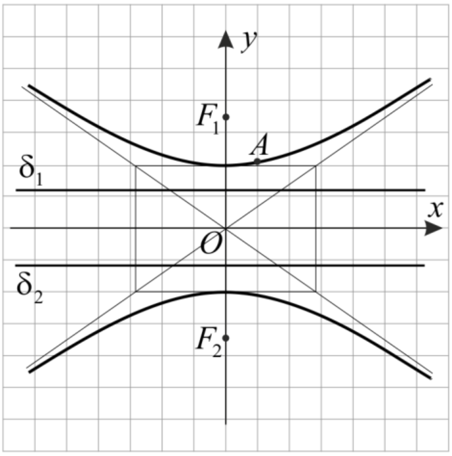
Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами 2, а между директрисами 8. Изобразить эллипс, его фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.

Решение. Зная расстояние между фокусами, найдем их координаты $F_1(1,0)$, $F_2(-1,0)$, отсюда $c=1$. Аналогично найдем $x_\delta = 4$, поэтому из равенства $x_\delta = \frac{a^2}{c}$, $4 = \frac{a^2}{1}$ получим, что $a=2$. Далее находим $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$ и $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



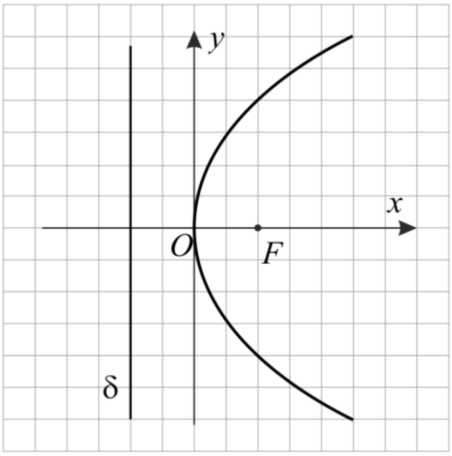
Задача 2. Составить уравнение гиперболы, если точка $A\left(1,\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ лежит на гиперболе, а асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$. Изобразить гиперболу, ее фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.

Решение. Изобразив асимптоты и точку A, замечаем, что у данной гиперболы действительной осью будет ось Oy. Асимптоты гиперболы задаются уравнением $y=\pm\frac{b}{a}x$, поэтому $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=\sqrt{2}b$, следовательно, гипербола задается уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{2b^2}=1$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A\left(1,\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $\frac{9}{2b^2}-\frac{1}{2b^2}=1$, отсюда $b=2,\ a=2\sqrt{2},\ c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$. Так как у гиперболы действительной осью является Oy, эксцентриситет и пересечение директрисы с координатной осью найдем из формул $\varepsilon=\frac{c}{b}=\sqrt{3},\ y_\delta=\frac{b^2}{c}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Задача 3. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно 4. Изобразить параболу, ее фокус, директрису.

Решение. Расстояние от фокуса до директрисы равно фокальному параметру параболы, поэтому $p=4$, а уравнение параболы имеет вид $y^2=8x$. Фокус находится в точке с координатами $\left(\frac{p}{2},0\right)$, отсюда $F(2,0)$. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$, $x=-2$.



Задачи для самостоятельного решения

9.1. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой сумма расстояний до точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равна 10.

9.2. Изобразить эллипс, его фокусы, директрисы

а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $x^2+2y^2=1$; в) $8x^2+3y^2-24=0$.

9.3. Отрезок неизменной длины скользит концами по сторонам прямого угла. Точка M делит отрезок на части длины a и b. Какая траектория точки M ?

9.4. Дан основной прямоугольник эллипса. Как с помощью циркуля и линейки построить фокусы эллипса?

9.5. Орбита Земли – эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Большая полуось эллипса составляет 150 млн. км, эксцентриситет равен 0,017. Найти разность между наибольшим и наименьшим расстояниями от Земли до Солнца.

9.6. Определить эксцентриситет искусственного спутника Земли, если его максимальное расстояние от Земли равно 947 км, минимальное – 228 км. Радиус Земли принять за 6371 км.

9.7. Найти точки на эллипсе $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 14.

9.8. Составить каноническое уравнение эллипса, если

а) расстояние между директрисами равно 12, а большая полуось равна $2\sqrt{3}$;

б) точки $A(2,2)$ и $B(3,1)$ лежат на эллипсе;

в) расстояние от его точки $A(8,12)$ до левого фокуса равно 20;

г) точка $A\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу, а фокусы находятся в точках $(\pm 1,0)$;

д) фокусы находятся в точках $(\pm 2,0)$, а директрисы имеют уравнения $x=\pm 18$;

е) хорда, соединяющая две соседние вершины, имеет длину 5 и наклонена к большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

ж) директрисы имеют уравнения $x=\pm 18$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат.

9.9. Определить эксцентриситет эллипса, если

а) его малая ось видна из фокусов под углом $60°$;

б) расстояние между директрисами втрое больше расстояния между фокусами.

9.10. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой модуль разности расстояний до точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равен 6.

9.11. Изобразить гиперболу, ее фокусы, директрисы

а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $4x^2-y^2=1$; в) $8x^2-4y^2+16=0$.

9.12. Даны вершины гиперболы и ее основной прямоугольник. Как с помощью циркуля и линейки построить фокусы гиперболы?

9.13. Доказать, что отрезок асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, расположенный между центром гиперболы и директрисой, имеет длину a.

9.14. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту.

9.15. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.

9.16. Доказать, что расстояние от фокусов гиперболы до ее асимптот равно $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9.17. Составить уравнение гиперболы, если

а) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, а эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$;

б) точка $A(1,2)$ лежит на гиперболе, а асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{1}{2}x$;

в) точка $A(1,3)$ лежит на гиперболе, а длина действительной оси равна 1;

г) точка $A(-9,4)$ лежит на гиперболе, а директрисы имеют уравнения $x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$;

д) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит отрезок между фокусами в отношении 4:1;

е) $\varepsilon=\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

9.18. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между ее вершинами виден из фокусов сопряженной гиперболы под углом $60°$.

9.19. Изобразить параболу, ее фокус, директрису

а) $y^2=6x$; б) $y^2=-2x$; в) $x^2=-4y$; г) $3y^2+16x=0$

9.20. Брошенный камень, двигаясь по параболе, достиг максимальной высоты 6 м и упал на расстоянии 24 м от начального положения. Определить фокальный параметр параболы.

9.21. Найти наименьшее расстояние от параболы $y^2=12x$ до прямой $x-y+7=0$.

9.22. Составить каноническое уравнение параболы, если

а) точка $A(5,-5)$ принадлежит параболе;

б) расстояние от фокуса до директрисы равно 12.

9.23. Как с помощью циркуля и линейки строить точки параболы, если известны ее фокус и директриса?

10. Кривые второго порядка и их классификация

Примеры решения задач

Задача 1. Изобразить кривую второго порядка, задающуюся в декартовой системе координат Oxy уравнением

$$\gamma: 9x^2+4xy+6y^2+2x-4y-4=0.$$

Решение. В этом уравнении $A=9,\ B=4,\ C=6$.

1. Поворачиваем систему координат вокруг начала координат на такой острый угол α, чтобы в новой системе координат $O'x'y'$ в уравнении отсутствовало слагаемое $B'x'y'$. Угол поворота определяется формулой

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{A-C}{B}.$$

В нашем случае $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{9-6}{4}=\frac{3}{4}$. Чтобы воспользоваться формулами поворота системы координат, необходимо найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для этого сначала находим

$$\cos 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{3}{5},$$

а затем

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Формулы поворота системы координат на угол α будут иметь вид

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases}\qquad \begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y',\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулами, найдем уравнение γ в новой системе координат $O'x'y'$

$$\gamma: 9\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)-4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)-4=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$\gamma: 10x'^2 + 5y'^2 - 2\sqrt{5}y' - 4 = 0.$$

2. Видим, что переменная y' входит в уравнение γ и в первой, и во второй степени, поэтому выделим при y' полный квадрат

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 4 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) - 4 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5,$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{1} = 1.$$

Введем систему координат $O''x''y''$ с помощью формул преобразования координат

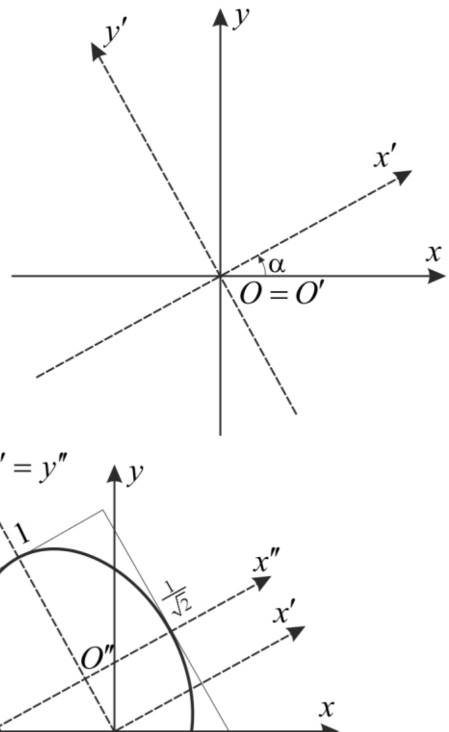
$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Эти формулы определяют перенос системы координат $O'x'y'$ на вектор $\bar{a}\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

В системе координат $O''x''y''$ кривая γ имеет уравнение

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

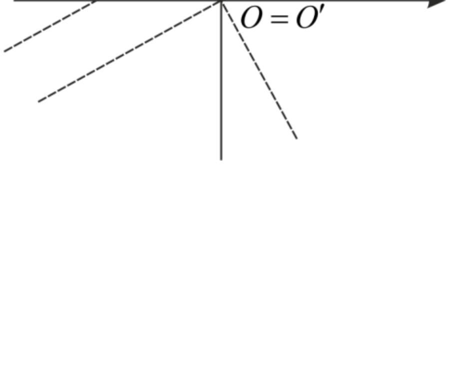
3. Видим, что γ – эллипс с полуосями $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $b = 1$. Изобразим его.

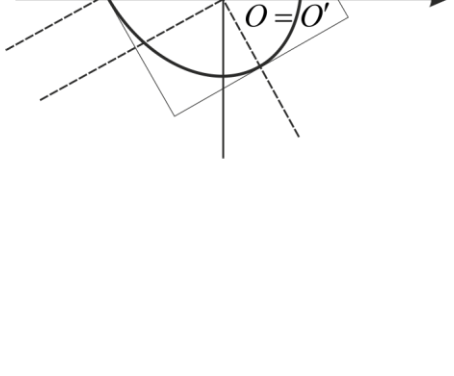


Повернем систему координат Oxy на вектор $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Перенесем систему координат $O'x'y'$ на вектор $\bar{a}\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

В системе координат $O''x''y''$ изображаем эллипс $\dfrac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y''^2}{1} = 1.$





Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах необходимо изобразить кривые второго порядка, приведя уравнение к каноническому виду.

10.1. $x^2+2y^2-4x+4-10=0$;

10.2. $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;

10.3. $3y^2-12x-6y+11=0$;

10.4. $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;

10.5. $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$;

10.6. $3x^2+12x+16y-12=0$;

10.7. $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$;

10.8. $x^2+x-6=0$;

10.9. $2x^2+6xy+10y^2-121=0$;

10.10. $9xy+4=0$;

10.11. $2x^2-2\sqrt{3}xy+9=0$;

10.12. $18x^2+24xy+11y^2-3=0$;

10.13. $x^2+xy+y^2-121=0$;

10.14. $2x^2-4xy+5y^2+8x-2y+9=0$;

10.15. $4xy-3y^2-4x+10y-6=0$;

10.16. $9x^2-24xy+16y^2-8x+19y+4=0$;

10.17. $x^2-xy+y^2+x+y=0$;

10.18. $xy+2x+y=0$.

РАЗДЕЛ II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

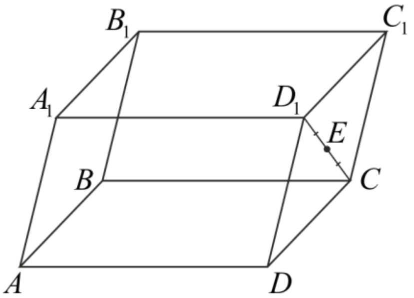
Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов

11. Аффинная и декартова системы координат в пространстве

Примеры решения задач

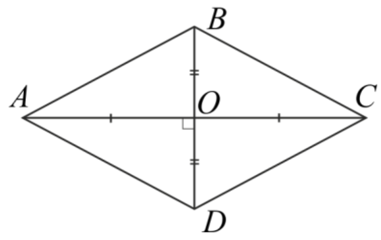
Задача 1. Даны координаты вершин $A(2,0,1)$, $B(1,3,-1)$, $B_1(3,-1,0)$, $D_1(-2,2,1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты центра грани CC_1D_1D.

Решение. Искомая точка E является серединой отрезка CD_1, поэтому найдем сначала координаты точки C. Для этого сместим точку B на вектор $\overline{BC}$. $\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{B_1D_1}$, но $\overline{AB}(-1,3,-2)$, $\overline{B_1D_1}(-5,3,1)$, поэтому $\overline{BC}(-1+(-5),3+3,-2+1)$, $\overline{BC}(-6,6,-1)$ следовательно, $C(1+(-6),3+6,-1+(-1))$, $C(-5,9,-2)$, $E\left(\frac{-5+2}{2},\frac{9+2}{2},\frac{-2+1}{2}\right)$, $E\left(-\frac{3}{2},\frac{11}{2},-\frac{1}{2}\right)$.



Задача 2. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(1,2,4)$, $B(2,1,1)$, $C(3,-2,0)$, $D(2,-1,3)$ – ромб и найти его площадь. Система координат – декартова.

Решение. Достаточно показать, что диагонали четырехугольника перпендикулярны и их середины совпадают. Проверим ортогональность векторов $\overline{AC}(2,-4,-4)$ и $\overline{BD}(0,-2,2)$ с помощью скалярного произведения $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=2\cdot 0+(-4)\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=0$ – условие ортогональности выполнено. Пусть O – середина AC, тогда $O(2,0,2)$. Легко проверить, что середина BD имеет такие же координаты. Таким образом, $ABCD$ – ромб, поэтому его площадь вычислим по формуле $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{0+4+4}=6\sqrt{2}$.



Задачи для самостоятельного решения

11.1. Даны координаты вершин $A(2,-1,1)$, $B(1,3,4)$, $A_1(4,2,0)$, $D(6,0,1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты остальных вершин.

11.2. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(0,2,-3)$, $B(1,-1,2)$, $C(-2,-1,0)$, $D(-3,2,-5)$ – параллелограмм.

11.3. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через одну точку и делятся ею пополам.

11.4. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(3,5,-4)$, $B(-1,1,2)$, $C(-5,-5,-2)$ является равнобедренным. Система координат – декартова.

11.5. Даны вершины $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-6)$, $C(-5,0,2)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины A. Система координат – декартова.

11.6. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(7,2,4)$, $B(4,-4,2)$, $C(6,-7,8)$, $D(9,-1,10)$ – квадрат. Система координат – декартова.

11.7. Найти углы треугольника с вершинами в точках $A(2,-1,0)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,0,2)$. Система координат – декартова.

11.8. AD – биссектриса треугольника с вершинами в точках $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Найти координаты точки D и длину AD. Система координат – декартова.

12. Векторное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные ортогональные векторы. Найти $\left|\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\right|$.

Решение. По свойствам векторного произведения

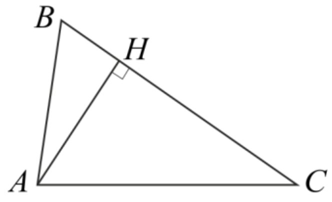
$$\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=2\overline{a}\times\overline{a}+2\overline{a}\times\overline{b}-3\overline{b}\times\overline{a}-3\overline{b}\times\overline{b}=$$

$$=2\cdot\overline{0}+2\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{a}\times\overline{b}-3\cdot\overline{0}=5\overline{a}\times\overline{b},$$

поэтому

$$\left|\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\right|=\left|5\overline{a}\times\overline{b}\right|=5\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=5\,|\,\overline{a}\,||\,\overline{b}\,|\sin 90^\circ=5.$$

Задача 2. Найти высоту AH треугольника ABC, если $A(-3,1,0)$, $B(-1,0,0)$, $C(1,1,-2)$.



Решение. Найдем высоту из равенства

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{BC} = \frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{BC}.$$

$BC = \sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2+(-2-0)^2} = 3$. $\overline{AB}\left(2,-1,0\right)$, $\overline{AC}\left(4,0,-2\right)$, поэтому

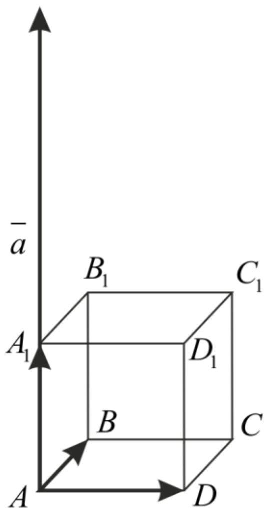
$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\bar{k} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6,$$

отсюда $AH = \frac{6}{3} = 2.$

Задача 3. Известны координаты вершин $A\left(1,-2,3\right)$, $B\left(3,-3,5\right)$, $D\left(-1,-4,4\right)$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты вершины A_1.

Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{AD}\times\overline{AB}$. По определению векторного произведения вектор $\bar{a}$ ортогонален $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, образует с ними правый базис. То же самое можно сказать и о векторе $\overline{AA_1}$, поэтому $\bar{a}$ и $\overline{AA_1}$ сонаправлены. $\overline{AD}\left(-2,-2,1\right)$, $\overline{AB}\left(2,-1,2\right)$, $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right| = 3$, поэтому $\left|\overline{AA_1}\right| = 3$, $\left|\bar{a}\right| = \left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|\sin\left(\widehat{\overline{AD},\overline{AB}}\right) = 9$ и, следовательно, $\overline{AA_1} = \frac{1}{3}\bar{a}$.



$$\bar{a} = \overline{AD}\times\overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k},$$

отсюда $\overline{AA_1}\left(-1,2,2\right)$. Смещая точку A на вектор $\overline{AA_1}$, получим $A_1\left(0,0,5\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Доказать, что $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\parallel\bar{b}$.

12.2. Как связаны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если при некотором $\bar{c}\neq\bar{0}$ имеет место равенство $\bar{a}\times\bar{c} = \bar{b}\times\bar{c}$.

12.3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $\bar{c} = 2\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a}+3\bar{b}$ были коллинеарны.

12.4. Известно, что $|\bar{a}| = 10,\ |\bar{b}| = 2,\ \bar{a}\bar{b} = 12$. Найти $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

12.5. Пусть $|\bar{a}| = 3,\ |\bar{b}| = 5,\ (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 60^\circ,\ \overline{AB} = 3\bar{a}+\bar{b},\ \overline{AC} = \bar{a}-3\bar{b}$. Найти площадь треугольника ABC.

12.6. Найти площадь треугольника ABC, если $A(2,1,0)$, $B(-1,1,2)$, $C(0,-3,-1)$.

12.7. Найти расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}\left(3,0,2\right)$, $\overline{AC}\left(0,1,-1\right)$.

12.8. Дан тетраэдр $SABC$ с прямыми плоскими углами при вершине S, $SA=8$, $SB=4$, $SC=6$. Точки P,Q,R делят ребра SA,SB,SC в отношениях 1:3, 3:1, 1:1 соответственно, считая от вершины S. Найти площадь треугольника PQR.

12.9. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}(4,-2,-3)$ и $\bar{b}(0,1,3)$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты $\bar{c}$, если $|\bar{c}|=26$.

12.10. Проверить, что для векторов $\bar{a}(1,1,0)$, $\bar{b}(0,3,1)$, $\bar{c}(2,0,1)$ выполняется тождество Якоби

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{0}.$$

12.11. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан, равна $\frac{3}{4}$ площади исходного треугольника.

12.12. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине длины $\overline{AC}\times\overline{BD}$.

12.13. Даны произвольные треугольник ABC и точка M. AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника. Доказать, что площадь одного из треугольников MAA_1, MBB_1, MCC_1 равна сумме площадей двух других.

12.14. $ABCD$ – произвольный тетраэдр. Каждой его грани поставлен в соответствие вектор, перпендикулярный этой грани, направленный вне тетраэдра и имеющий длину, равную площади этой грани. Доказать, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

13. Смешанное произведение векторов

Примеры решения задач

Задача 1. Проверить, лежат ли точки $A(1,-1,0)$, $B(1,1,-2)$, $C(2,-1,4)$, $D(2,-3,6)$ в одной плоскости.

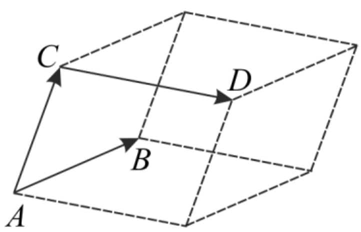
Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости т. и т. т., когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны. $\overline{AB}(0,2,-2)$, $\overline{AC}(1,0,4)$, $\overline{AD}(1,-2,6)$, поэтому

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix}=0\cdot 8-2\cdot 2-2(-2)=0,$$

следовательно, векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны, а точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задача 2. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD можно найти по формуле

$$\rho(AB,CD)=\frac{\left|\left(\overline{AB},\overline{CD},\overline{AC}\right)\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{CD}\right|}.$$



Доказательство. Построим на векторах $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AC}$ параллелепипед. Прямые AB и CD лежат в плоскостях оснований параллелепипеда, поэтому расстояние между ними равно высоте параллелепипеда, которая может быть найдена по формуле

$$h = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{\left|\left(\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC}\right)\right|}{\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|}.$$

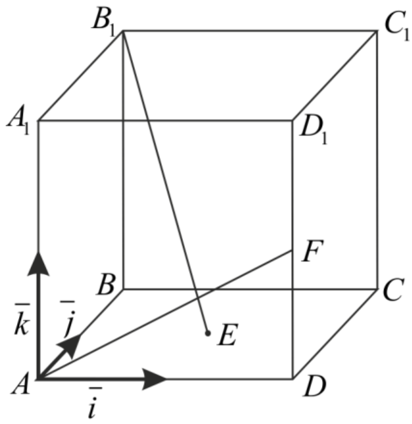
Задача 3. Точка E – центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка F – середина ребра DD_1. Найти расстояние между прямыми AF и B_1E.

Решение. Введем ортонормированный базис $\overline{i} = \frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{j} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{k} = \frac{1}{2}\overline{AA_1}$ и найдем координаты векторов $\overline{AF}$, $\overline{B_1E}$ и $\overline{AE}$. $\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 2\overline{i} + \overline{k}$, $\overline{AF}\left(2, 0, 1\right)$, $\overline{B_1E} = \overline{B_1B} + \overline{BE} = -2\overline{k} + \overline{i} - \overline{j}$, $\overline{B_1E}\left(1, -1, -2\right)$, $\overline{AE} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{AF}\left(1, 1, 0\right)$. Тогда

$$\left(\overline{AF}, \overline{B_1E}, \overline{AE}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6,$$

$$\overline{AF} \times \overline{B_1E} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k},$$

$$\left|\overline{AF} \times \overline{B_1E}\right| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3},$$



и, согласно предыдущей задаче,

$$\rho\left(AF, B_1E\right) = \frac{\left|\left(\overline{AF}, \overline{B_1E}, \overline{AE}\right)\right|}{\left|\overline{AF} \times \overline{B_1E}\right|} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Существуют ли такие векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, что $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > |\overline{a}||\overline{b}||\overline{c}|$?

13.2. Доказать, что если $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0}$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны.

13.3. Найти $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, если $\overline{a}\left(2, -3, 1\right)$, $\overline{b}\left(1, 1, 2\right)$, $\overline{c}\left(3, 1, -1\right)$.

13.4. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}\left(-2, -1, 1\right)$, $\overline{b}\left(4, -4, 1\right)$, $\overline{c}\left(4, -6, 2\right)$.

13.5. Доказать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

13.6. Найти высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A, если $A(2, -4, 5)$, $B(-1, -3, 4)$, $C(5, 5, -1)$, $D(1, -2, 2)$.

13.7. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\overline{AB}\left(0, 1, -1\right)$, $\overline{AC}\left(2, -1, 4\right)$, $\overline{AA_1}\left(-3, 2, 2\right)$. Найти объем, площадь основания и высоту призмы.

13.8. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на середине стороны AD, точка K делит AB в отношении 2:1, точка N — центр грани CC_1D_1D. Найти объем тетраэдра B_1KMN.

13.9. Точка M делит ребро BB_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении 2:1. Найти расстояние между прямыми CD_1 и MD.

13.10. Найти координаты вершины D тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, $V_{ABCD} = 5$, $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$.

13.11. Точки B_1, B_2, B_3, B_4 являются точками пересечения медиан граней тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Найти отношение объемов тетраэдров $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$.

Плоскости и прямые в пространстве

14. Уравнение плоскости

Примеры решения задач

Задача 1. Вершины тетраэдра $ABCD$ имеют координаты $A(1,0,-2)$, $B(0,1,-1)$, $C(-1,-1,0)$, $D(2,-1,1)$.

а) Составить уравнение плоскости ABD.

б) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой AB.

в) Найти высоту тетраэдра, проведенную из точки C.

г) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку C параллельно плоскости ABD.

Решение. а) Зададим плоскость ABD по точке A и направляющим векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Так как $\overline{AB}(-1,1,1)$, $\overline{AD}(1,-1,3)$, то

$$\Pi_{ABD}: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(x-1)+4y+0(z+2) = 4x+4y-4,$$

$$\Pi_{ABD}: 4x+4y-4=0,$$

$$\Pi_{ABD}: x+y-1=0.$$

б) Составим уравнение искомой плоскости по точке A и вектору нормали $\overline{AB}(-1,1,1)$

$$\Pi: -1(x-1)+1(y-0)+1(z+2)=0,$$

$$\Pi: -x+y+z+3=0.$$

в) Высота тетраэдра равна расстоянию от C до ABD, поэтому ее можно найти по формуле

$$\rho(C, ABD) = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot(-1)+0\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

г) Способ 1. по уравнению плоскости ABD находим её вектор нормали $\overline{n}(1,1,0)$. Вектор $\overline{n}$ будет являться вектором нормали и для искомой плоскости, поскольку она параллельна ABD. Составим уравнение плоскости по точке C и вектору нормали $\overline{n}$:

$$\Pi: 1(x+1)+1(y+1)+0(z-0)=0,$$

$$\Pi: x+y+2=0.$$

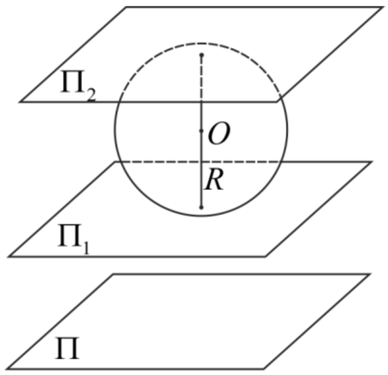
Способ 2. Плоскости параллельны, поэтому их уравнения отличаются лишь свободным членом. Поэтому уравнение искомой плоскости имеет вид $x+y+D=0$. Чтобы найти коэффициент D, используем тот факт, что точка C лежит в плоскости, значит, её координаты удовлетворяют уравнению $x+y+D=0$.

$$-1+(-1)+D=0,$$
$$D=2,$$
Следовательно, искомая плоскость имеет уравнение $x+y+2=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая параллельна плокости $6x+3y+2z-4=0$ и касается сферы $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Решение. Так как данная и искомая плоскости параллельны, то их уравнения отличаются лишь свободным членом, т.е. уравнение искомой плоскости Π имеет вид $6x+3y+2z+D=0$.

Плоскость Π касается сферы, поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, $\rho(O,\Pi)=R$. Так как $O(0,2,-1)$, $R=3$, то
$$\rho(O,\Pi)=\frac{|6\cdot 0+3\cdot 2+2\cdot(-1)+D|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|4+D|}{7}=3.$$



Отсюда
$$|4+D|=21,$$
$$\left[\begin{array}{l}4+D=21,\\ 4+D=-21,\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}D=17,\\ D=-25.\end{array}\right.$$
Действительно, искомых плоскостей две, и их уравнения
$$\Pi_1: 6x+3y+2z+17=0,$$
$$\Pi_2: 6x+3y+2z-25=0.$$

Задача 3. Найти угол между плоскостями $\Pi_1: 16x+8y+2z+1=0$ и $\Pi_2: 2x-2y+z+5=0$.

Решение. Найдем векторы нормали плоскостей: $\overline{n_1}(16,8,2)$, $\overline{n_2}(2,-2,1)$. В качестве вектора нормали первой плоскости также можно взять вектор $(8,4,1)$, т.к. он коллинеарен вектору $\overline{n_1}$. Таким образом,
$$\cos\alpha=\frac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{|8\cdot 2+4\cdot(-2)+1\cdot 1|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{9}{9\cdot 3}=\frac{1}{3},\ \ \alpha=\arccos\frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

14.1. Принадлежат ли плоскости $x-2z+4=0$ точки $A(-2,3,0)$ и $B(0,1,2)$? Указать еще несколько точек, принадлежащих этой плоскости.

14.2. Пусть $A(2,1,-2)$, $B(0,-1,3)$, $C(1,-1,1)$. Составить уравнение плоскости ABC и найти точки ее пересечения с координатными осями.

14.3. Найти высоту AH тетраэдра $ABCD$, если $A(1,0,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,0)$, $D(2,-1,0)$.

14.4. Найти расстояние между плоскостями $x-2y-2z+7=0$ и $2x-4y-4z+17=0$.

14.5. Доказать, что расстояние между плоскостями $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ и $\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ может быть вычислено по формуле
$$\rho(\Pi_1,\Pi_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

14.6. Составить уравнение плоскости, которая параллельна плоскости $2x-2y+z-1=0$ и проходит на расстоянии 5 от нее.

14.7. Определить взаимное расположение плоскости $4x-3z+1=0$ и сферы $x^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$.

14.8. Составить уравнение плоскостей, которые параллельны плоскости $2x+y-4z+5=0$ и касаются сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=21$.

14.9. Две грани куба лежат в плоскостях $\Pi_1: 3x-y+z=0,\ \Pi_2: 6x-2y+2z+3=0$. Найти объем куба.

14.10. Написать уравнение плоскости, зная, что точка $M(2,-1,3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

14.11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,0,-5)$ перпендикулярно плоскостям $\Pi_1: y-2z=0,\ \Pi_2: x+2y+3z-1=0$.

14.12. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x+3y+5z-10=0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью XOY.

14.13. Написать уравнение сферы, вписанной в тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $x+2y-2z+8=0$.

14.14. Написать уравнение биссекторных плоскостей двугранного угла, образованного плоскостями $\Pi_1: 3x-2y-z+3=0$ и $\Pi_2: 2x-3y+z=0$.

14.15. Написать уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла, образованного плоскостями $\Pi_1: x-y+2z-1=0$ и $\Pi_2: 2x-y+z-3=0$, которому принадлежит точка $M(1,1,1)$

14.16. Определить расположение точки $M(2,\frac{1}{2},\frac{9}{4})$ относительно тетраэдра с вершинами в точках $A(0,0,2),\ B(3,0,5),\ C(1,1,0),\ D(4,1,2)$.

14.17. Найти угол между плоскостями

а) $x-2y-2z=0$ и $3x+4z+2=0$;

б) $2x-z=0$ и $x+3y-2=0$;

в) $x-2y+z+1=0$ и $-2x+4y-2z=0$.

15. Прямая в пространстве

Примеры решения задач

Задача 1. Найти параметрическое представление прямой, которая проходит через точку $M(1,0,-3)$ и параллельна прямой $l: \begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0. \end{cases}$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой *l*. Для этого возьмем 2 произвольные точки на *l*. Пусть $x=0$, тогда

$$\begin{cases} -y+z-3=0, \\ 3y-z-1=0, \end{cases}$$

$$2y-4=0,\ y=2,$$

$$z=y+3=5,$$

получили точку $A(0,2,5)$. Пусть теперь $y=0$, тогда

$$\begin{cases} 2x+z-3=0, \\ x-z-1=0, \end{cases}$$

$$3x-4=0,\ x=\tfrac{4}{3},$$
$$z=x-1=\tfrac{1}{3},$$

получили точку $B\left(\tfrac{4}{3},0,\tfrac{1}{3}\right)$. Очевидно, вектор $\overline{AB}\left(\tfrac{4}{3},-2,-\tfrac{14}{3}\right)$ – направляющий вектор прямой *l*, значит, и для искомой прямой он также является направляющим, т.к. прямые параллельны. Находим параметрическое представление прямой по точке *M* и направляющему вектору

$$AB:\begin{cases} x=1+\tfrac{4}{3}t,\\ y=-2t,\\ z=-3-\tfrac{14}{3}t. \end{cases}$$

Также можно записать еще одно представление искомой прямой, если учесть, что вектор $3\overline{AB}(4,-6,-14)$ также является направляющим

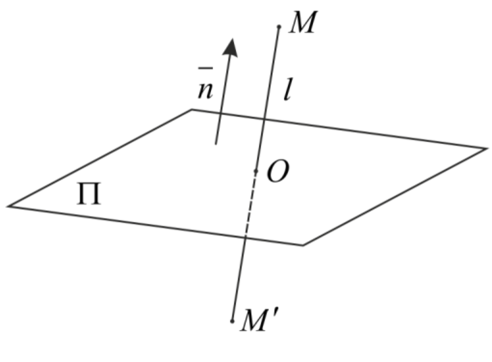
$$AB:\begin{cases} x=1+4t,\\ y=-6t,\\ z=-3-14t. \end{cases}$$

Задача 2. Найти точку, симметричную точке $M(2,-1,1)$ относительно плоскости $\Pi: y+2z+4=0$.

Решение. Точка M' лежит на прямой l, проходящей через т. *M* перпендикулярно плоскости Π. Очевидно, вектор нормали плоскости будет направляющим вектором прямой *l*. Зададим l по точке $M(2,-1,1)$ и вектору $\overline{n}(0,1,2)$

$$l:\begin{cases} x=2,\\ y=-1+t,\\ z=1+2t. \end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямой l и плоскости Π.



$$O=l\cap\Pi,\ \begin{cases} x=2,\\ y=-1+t,\\ z=1+2t,\\ y+2z+4=0, \end{cases}$$
$$-1+t+2(1+2t)+4=0,$$
$$5t+5=0,$$
$$t=-1.$$

Подставляем значение параметра в представление прямой и получаем точку $O(2,-2,-1)$. Вектор $\overline{OM'}$ равен вектору $\overline{MO}$, поэтому $\overline{OM'}(0,-1,-2)$. Сместив точку *O* на вектор $\overline{OM'}$, получим точку M'. $M'(2+0,-2-1,-1-2)$, $M'(2,-3,-3)$.

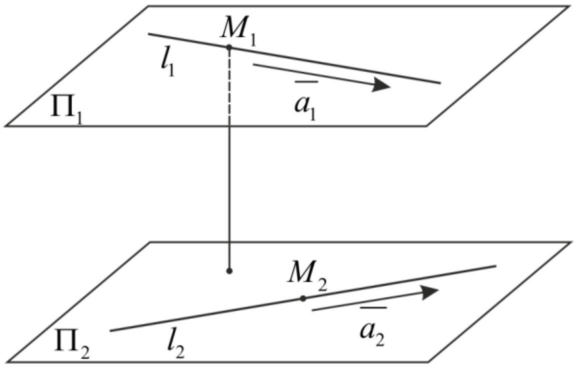
Задача 3. Доказать, что прямые скрещиваются и найти расстояние между ними.

$$l_1:\begin{cases} x=t,\\ y=-2+2t,\\ z=1, \end{cases}\quad l_2:\begin{cases} x=2-2t,\\ y=-2t,\\ z=-1-t. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющие векторы этих прямых: $\overline{a_1}(1,2,0)$, $\overline{a_2}(-2,-2,-1)$. Векторы неколлинеарны, значит, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Чтобы выяснить это, проверим, имеет ли решения система уравнений

$$\begin{cases} t = 2-2s, \\ -2+2t = -2s, \\ 1 = -1-s. \end{cases}$$

Параметр t в представлении прямой l_2 мы заменили на s, т.к. параметры в представлениях l_1 и l_2 независимы друг от друга, поэтому при одновременной работе с ними их нельзя обозначать одной буквой. Легко проверить, что эта система не имеет решений, поэтому общих точек у прямых нет, значит, они скрещиваются.



Известно, что через любые скрещивающиеся прямые можно провести пару параллельных плоскостей и расстояние между плоскостями равно расстоянию между прямыми.

Векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ являются направляющими векторами плоскости Π_2, поэтому можно составить ее уравнение по этим векторам и какой-нибудь точке прямой l_2. Возьмем, например, значение параметра t = 0 и получим точку с координатами $M_2(2,0,-1)$. Таким образом,

$$\Pi_2 : \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2x+4+y+2z+2 = -2x+y+2z+6,$$

$$\Pi_2 : -2x+y+2z+6=0.$$

Возьмем произвольную точку на прямой l_1 (например, при t = 0 получим точку $M_1(0,-2,1)$) и найдем расстояние от этой точки до плоскости Π_2 – это и есть расстояние между Π_1 и Π_2, а следовательно, и между l_1 и l_2.

$$\rho(L_1,L_2) = \rho(\Pi_1,\Pi_2) = \rho(M,\Pi_2) = \frac{|-2\cdot 0+1\cdot(-2)+2\cdot 1+6|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = 2.$$

Задача 4. Определить взаимное расположение прямых

$$l_1 : \begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 3-t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = -1-6t, \\ y = 4+2t, \\ z = -2-4t. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющие векторы прямых: $\overline{a_1}(3,-1,2)$, $\overline{a_2}(-6,2,-4)$. Векторы коллинеарны, поэтому прямые либо параллельны, либо совпадают.

Возьмем какую-либо точку на прямой l_1, например $M_1(2,3,0)$. Если M принадлежит l_2, то прямые совпадают, в противном случае они параллельны.

Точка М лежит на прямой l_2, если ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 2=-1-6t, \\ 3=4+2t, \\ 0=-2-4t. \end{cases}$$

Находим, что значение $t=-\frac{1}{2}$ является решением системы, поэтому $M\in l_2$, и, следовательно, прямые совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

15.1. Принадлежат ли прямой $l:\begin{cases} x=-1+4t, \\ y=3t, \\ z=-1 \end{cases}$ точки $A(-9,-6,-1)$ и $B(0,3,-1)$? Указать еще несколько точек, принадлежащих этой прямой.

15.2. Найти точки пересечения прямой AB с координатными плоскостями, если $A(4,2,-1),\ B(3,0,2)$.

15.3. Записать параметрическое представление прямой

$$l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0. \end{cases}$$

15.4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1,1,-3)$ параллельно прямым

$$l_1:\begin{cases} 2x-2y+3z-4=0, \\ x+2y-4z+1=0, \end{cases}\quad l_2:\begin{cases} 3x-y+z=0, \\ x+y-3z+1=0. \end{cases}$$

15.5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-1,1,3)$ параллельно прямой $l:\begin{cases} x=t, \\ y=-2t, \\ z=3t \end{cases}$ и перпендикулярно плоскости $3x-2y+5z=0$.

15.6. Определить взаимное расположение прямых

а) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t, \end{cases}\quad \begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=t, \\ y=-8-4t, \\ z=-3-3t, \end{cases}\quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=9t, \\ y=5t, \\ z=-3+t, \end{cases}\quad \begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ z-4=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x+z-8=0, \\ 2y+3z-7=0. \end{cases}$

15.7. Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки $A(-1,2,-3)$ на координатные плоскости.

15.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l_1:\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+6t, \\ z=4t \end{cases} \text{ параллельно прямой } l_2:\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=3t, \\ z=-t. \end{cases}$$

15.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,3,0)$ и через прямую

$$l:\begin{cases} x=1, \\ y=2+t, \\ z=2-t. \end{cases}$$

15.10. Найти угол между прямой и плоскостью

а) $l:\begin{cases} x=-3+t, \\ y=2-2t, \\ z=-1+2t \end{cases}$ и $\Pi: 4x+2y+2z-5=0$;

б) $l:\begin{cases} x=-t, \\ y=1+2t, \\ z=3 \end{cases}$ и $\Pi: x-2y+1=0$;

в) $l:\begin{cases} x=0, \\ y=-1+t, \\ z=4-2t \end{cases}$ и $\Pi: 4x+2y+z=0$.

15.11. Определить взаимное расположение прямой и плоскости, в случае пересечения найти угол между ними и точку пересечения

а) $l: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Pi: 3x+5y-z-2=0$;

б) $l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$, $\Pi: 3x-3y+2z-5=0$;

в) $l:\begin{cases} x=13+8t, \\ y=1+2t, \\ z=4+3t, \end{cases}$ $\Pi: x+2y-4z+1=0$;

г) $l:\begin{cases} x=7+5t, \\ y=4+t, \\ z=5+4t, \end{cases}$ $\Pi: 3x-y+2z-5=0$.

15.12. Написать уравнение и найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(-3,13,7)$ на прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$.

15.13. На прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}$ найти точку, равноудаленную от точек $A(4,-6,1)$ и $B(-2,2,-1)$.

15.14. Найти точку, симметричную точке $M(1,2,3)$ относительно плоскости $2x-3y+5z-68=0$.

15.15. Найти точку, симметричную точке $M(1,2,3)$ относительно прямой $\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$.

15.16. Составить уравнение проекции прямой $l:\begin{cases} x=3+5t, \\ y=-1+t, \\ z=4+t \end{cases}$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

15.17. Найти расстояние между прямыми $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{1}$ и $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

15.18. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $\begin{cases} y=1, \\ z+1=0 \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости перпендикулярно данной прямой.

15.19. Найти общий перпендикуляр к прямым $l_1:\begin{cases}x=2+3t,\\ y=-1-2t,\\ z=2t\end{cases}$ и $l_2:\begin{cases}x=-1+3t,\\ y=2+2t,\\ z=1.\end{cases}$

15.20. Через точку пересечения плоскости $x-2y+3z+5=0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она принадлежала этой плоскости и была параллельна плоскости Oyz.

15.21. Найти параметрическое представление прямой, которая проходит через начало координат и пересекает каждую из прямых $l_1:\begin{cases}x=t,\\ y=1-t,\\ z=3+t\end{cases}$ и $l_2:\begin{cases}x=2+2t,\\ y=3-t,\\ z=4+3t.\end{cases}$

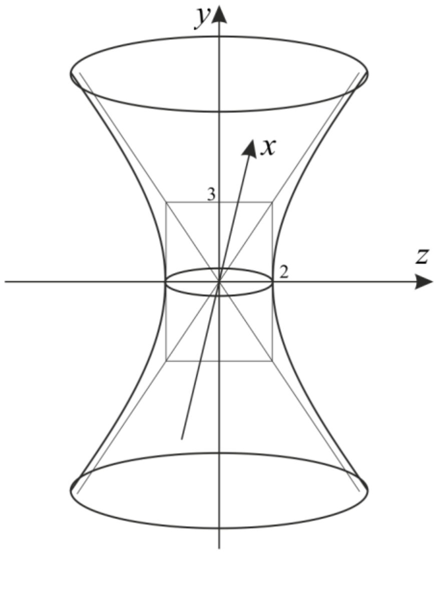
Поверхности второго порядка

16. Поверхности второго порядка. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности второго порядка

Примеры решения задач

Задача 1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, лежащей в плоскости Oyz, около оси Oy и изобразить эту поверхность.

Решение. Поверхность вращения с осью Oy и профилем $\gamma: z=f(y)$ будет иметь уравнение $z^2+x^2=f(y)^2$. В нашем случае $\gamma:\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ или $\gamma: z=\sqrt{4\left(1+\frac{y^2}{9}\right)}$, поэтому уравнение поверхности будет иметь вид



$$\Phi: x^2+z^2=4\left(1+\frac{y^2}{9}\right),$$

$$\Phi:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

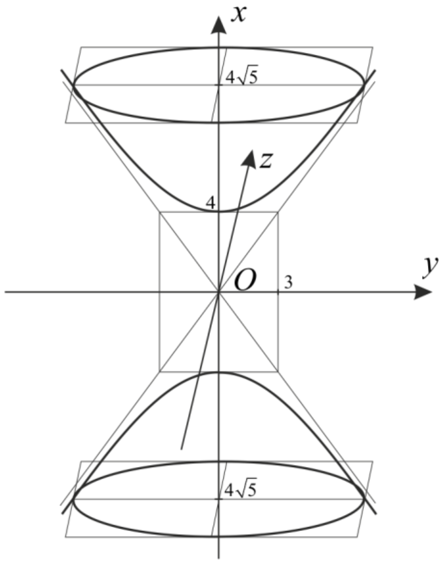
– однополостный гиперболоид. Изображая в плоскости Oyz гиперболу $\gamma:\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, а затем окружности, образованные при вращении некоторых ее точек около оси Oy (на изображении они будут эллипсами), получим изображение гиперболоида.

Задача 2. Изобразить поверхность $\Phi: 9x^2-16y^2-36z^2-144=0$, используя метод сечений.

Решение. Перенесем -144 в правую часть уравнения и разделим обе части на -144, получим

$$\Phi:-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1,$$

поэтому Φ – двуполостный гиперболоид с осью Ox. Для изображения поверхности сделаем ее сечения плоскостями $\Pi_1 : z = 0$, $\Pi_2 : x = 4\sqrt{5}$, $\Pi_3 : x = -4\sqrt{5}$ – это плоскость Oxy и плоскости, параллельные плоскости Oyz и проходящие через точки $\left(4\sqrt{5}, 0, 0\right)$ и $\left(-4\sqrt{5}, 0, 0\right)$. Пусть $\gamma_1 = \Phi \cap \Pi_1$, тогда $\gamma_1 : \begin{cases} z = 0, \\ -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = -1, \end{cases}$ $\quad \gamma_1 : \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$ – гипербола в плоскости Π_1. Сечения $\gamma_2 = \Phi \cap \Pi_2$, $\gamma_3 = \Phi \cap \Pi_3$ задаются уравнениями



$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 4\sqrt{5}, \\ -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = -1, \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x = -4\sqrt{5}, \\ -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = -1, \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 4\sqrt{5}, \\ -5 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = -1, \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x = -4\sqrt{5}, \\ -5 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = -1, \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 4\sqrt{5}, \\ \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{16} = 1, \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x = -4\sqrt{5}, \\ \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{16} = 1. \end{cases}$$

Кривые γ_2 и γ_3 – эллипсы, лежащие в плоскостях Π_2 и Π_3. Изображая γ_1, γ_2 и γ_3, получим изображение двуполостного гиперболоида.

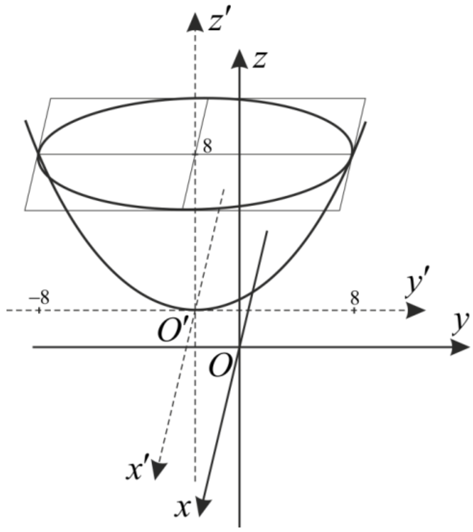
Задача 3. Изобразить поверхность $\Phi : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8z + 21 = 0$ вместе с системой координат.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду

$$\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) = 8z - 21,$$

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 8z - 16,$$

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{4} + \frac{\left(y+2\right)^2}{4} = 2\left(z-2\right).$$



Введем новую систему координат $O'x'y'z'$, определяемую формулами преобразования координат

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2, \\ z' = z - 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 2, \\ z = z' + 2. \end{cases}$$

В новой с.к. поверхность имеет уравнение $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{4} = 2z'$ – эллиптический параболоид с осью $O'z'$. Изобразим ее, построив в новой с.к. сечения $\gamma_1 = \Phi \cap \Pi_1 : x' = 0$, $\gamma_1 : \begin{cases} x' = 0, \\ y'^2 = 8z', \end{cases}$

$$\gamma_2 = \Phi \cap \Pi_2 : z' = 8, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} z' = 8, \\ \frac{x'^2}{64} + \frac{y'^2}{64} = 1. \end{cases}$$

Из формул преобразования координат определяем, что новая с.к. получена из старой параллельным переносом на вектор $(1,-2,2)$, поэтому изобразим старую с.к. путем параллельного переноса новой на вектор $(-1,2,-2)$.

Задача 4. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности $\Phi: x^2-4y^2=4z$, проходящих через точку $M(-4,1,3)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $(x-2y)(x+2y)=4z$ и зададим две прямолинейные образующие

$$l_1:\begin{cases}x-2y=4\lambda_1 z,\\ x+2y=\frac{1}{\lambda_1},\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x+2y=4\lambda_2 z,\\ x-2y=\frac{1}{\lambda_2}.\end{cases}$$

Точка M лежит на этих прямых, поэтому, подставляя ее координаты в уравнения прямых

$$\begin{cases}-4-2=12\lambda_1,\\ -4+2=\frac{1}{\lambda_1},\end{cases}\qquad \begin{cases}-4+2=12\lambda_2,\\ -4-2=\frac{1}{\lambda_2},\end{cases}$$

найдем значения параметров $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ и $\lambda_2=-\frac{1}{6}$, отсюда

$$l_1:\begin{cases}x-2y=-2z,\\ x+2y=-2,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x+2y=-\frac{2}{3}z,\\ x-2y=-6.\end{cases}$$

Составляя параметрические представления этих прямых, получим

$$l_1:\begin{cases}x=-2-2t,\\ y=t,\\ z=1+2t,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x=-6+2t,\\ y=t,\\ z=9-6t.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

16.1. Доказать, что при сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка.

16.2. Определить тип поверхности

а) $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$; б) $2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$;

в) $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$; г) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$;

д) $4x^2+y^2-16z=0$; е) $2x^2+2y^2-4z+5=0$;

ж) $x^2-2y^2-4x-z+1=0$; з) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

и) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$; к) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

л) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+4=0$; м) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

н) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.

16.3. Доказать, что уравнение $x^2=yz$ задает конус второго порядка.

16.4. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой около оси

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ Ox$; б) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1,\ Oy$; в) $\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1,\ Oz$;

г) $x^2=2y,\ Oy$; д) $y^2-\frac{x^2}{4}=1,\ Ox$; е) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ Oz$;

ж) $z=2y,\ Oy$; з) $x^2=4z,\ Oz$; и) $x^2+\frac{y^2}{9}=1,\ Ox$.

Изобразить эти поверхности.

16.5. Изобразить поверхности, используя метод сечений а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$;

г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$; д) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=0$; е) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;

ж) $z^2=2x$; з) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-z^2=1$; и) $z^2-y^2=1$.

к) $-9x^2+4y^2+4z^2=36$; л) $x^2-y+z^2=0$; м) $x^2-y^2-4z^2=0$.

16.6. Изобразить поверхности вместе с системой координат

а) $4x^2+9y^2+9z^2-8x+36y-54z+85=0$;

б) $4y^2+z^2-8x-16y-16=0$;

в) $4x^2-5y^2+5z^2-8x+30z+29=0$;

г) $4x^2+8y^2-z^2-8x-48y-8z+76=0$;

д) $3x^2-4y^2+12z^2-6x-16y+19=0$.

16.7. Составить уравнение цилиндра, состоящего из прямых, параллельных вектору $\bar{a}(1,0,1)$ и проходящих через точки эллипса $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$, лежащего в плоскости $z=0$.

16.8. Составить уравнение конуса, состоящего из прямых, проходящих через точку $S(1,1,0)$ и точки окружности $x^2+z^2-z=0$, лежащей в плоскости $y=0$.

16.9. Составить уравнение кругового конуса с осью Oz и вершиной в начале координат, если известно, что точка $M(3,-4,7)$ принадлежит конусу.

16.10. Сделать эскиз тела, ограниченного поверхностями

а) $y^2=4-3x$, $y^2=x$, $z=\pm 2$;

б) $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$;

в) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z=0$;

г) $x^2+y^2=1$, $x^2-1=z$, $z=0$;

д) $x^2+2y^2=z$, $z=4-x^2$.

16.11. Может ли число прямолинейных образующих, проходящих через точку поверхности второго порядка, быть равным 0,1,2,3,… ∞? Привести примеры.

16.12. Доказать, что плоскость Π пересекает поверхность Φ по прямолинейным образующим и составить их уравнения

а) $\Pi: 2x-12y-z+16=0$, $\Phi: x^2-4y^2=2z$;

б) $\Pi: 4x-5y-10z-20=0$, $\Phi: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$.

16.13. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности Φ, параллельных плоскости Π. Найти точку, в которой они пересекаются, и угол между ними

а) $\Pi: 6x+4y+3z-17=0$, $\Phi: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$;

б) $\Pi: 3x+2y-4z=0$, $\Phi: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$.

16.14. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности Φ, проходящих через точку M

а) $M(3,-2,2)$, $\Phi: 4x^2-y^2=16z$;

б) $M(6,-3,2)$, $\Phi: x^2+4y^2-9z^2=36$

КОНТРОЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Задания для подготовки к контрольной работе №1.

1. Даны неколлинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. С помощью циркуля и линейки построить векторы

   а) $\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$; б) $3\overline{b}-2\overline{a}$; в) $\frac{3}{5}\overline{b}-\sqrt{3}\overline{a}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{3}\overline{a}+\frac{5}{3}\overline{b}$.
2. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\overline{a}=\overline{AC_1}$, $\overline{b}=\overline{AB_1}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$.
3. Доказать, что если система векторов $\overline{a_1},\overline{a_3},\overline{a_4}$ линейно зависима, то и система $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\overline{a_4},\overline{a_5}$ также линейно зависима.
4. Доказать, что система векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\overline{0}$ линейно зависима.
5. Доказать, что если система векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независима, то система $\overline{a}+\overline{b},\ \overline{a}-2\overline{c},\ \overline{b}+\overline{c}$ также линейно независима.
6. При каких $x\in\mathbb{R}$ система строк $(1-x,x)$, $(3x,6+x)$ линейно зависима?
7. Проверить линейную зависимость систем строк $(-1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(-4,1,-1)$.
8. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, $\overline{e_1}=\overline{CA_1}$, $\overline{e_2}=\overline{CO}$. Найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BC}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$.
9. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{e_1}=\overline{A_1C}$, $\overline{e_2}=\overline{A_1B}$, $\overline{e_3}=\overline{A_1A}$. Доказать, что $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ – базис векторов пространства и найти координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{CB_1}$ в этом базисе.
10. Пусть $\overline{e_1}=(-1,1)$, $\overline{e_2}=(3,-1)$, $\overline{a}=(1,1)$. Доказать, что строки $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты строки $\overline{a}$ в этом базисе.
11. Доказать, что система строк $\overline{e_1}=(2,1,0)$, $\overline{e_2}=(1,2,-1)$, $\overline{e_3}=(0,1,-1)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\overline{a}=(-3,-1,-1)$ в этом базисе.
12. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.
13. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
14. Найти угол между равными сторонами равнобедренного треугольника, если его медианы, проведенные из концов основания, перпендикулярны.
15. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – центр грани BB_1C_1C, а точка F – середина ребра BB_1. Найти угол между прямыми AE и DF.
16. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если $A(1,-2),\ B(2,0),\ C(0,-1)$.
17. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{e_1}=\overline{CB}$, $\overline{e_2}=\overline{CE}$. Найти координаты вершин шестиугольника в системе координат $C,\overline{e_1},\overline{e_2}$.
18. Даны вершины $A(2,-1)$ и $B(0,3)$ треугольника ABC и точка пересечения медиан $M(1,2)$. Найти координаты третьей вершины.

19. Даны декартовы координаты вершин $A(0,-4),\ B(-4,2),\ C(3,1)$ треугольника ABC. Найти длину медианы, проведенной из вершины C.
20. Известны декартовы координаты смежных вершин $B(-3,1)$ и $C(1,-2)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты двух других вершин.
21. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан, M – середина OB. Записать формулы преобразования координат точек при переходе от репера $A, \overline{AC_1}, \overline{AC}$ к реперу $A_1, \overline{A_1O}, \overline{A_1B}$. Найти старые и новые координаты точки M, выполнить проверку с помощью формул перехода.
22. Центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ находится в точке O, $\overline{e_1} = \overline{FA},\ \overline{e_2} = \overline{FB}$, $\overline{e_1}' = \overline{DO},\ \overline{e_2}' = \overline{DF_1}$. Записать формулы преобразования координат векторов и точек плоскости, полагая, что начала старого и нового реперов находятся в точках F и D. Найти старые и новые координаты точки B, выполнить проверку с помощью формул перехода.

Задания для подготовки к контрольной работе №2.

1. Для прямой $l: M(-2,1),\ \overline{a}(4,-3)$ найти параметрическое представление, каноническое и общие уравнения.
2. Даны уравнения $l_1: 2x+y+2=0,\ l_2: x-2y+1=0$ двух смежных сторон параллелограмма и координаты точки пересечения его диагоналей $M(2,-1)$. Составить уравнения двух других сторон.
3. Даны уравнения $x+y-3=0,\ x-y+1=0$ двух сторон треугольника и уравнение $3x+2y-6=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.
4. Составить уравнение касательной, проведенной к окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ через точку $A(3,1)$ этой окружности.
5. В треугольнике ABC $A(-1,2)$, $B(0,2)$, $M(3,-3)$ – точка пересечения высот. Составить уравнение стороны AC.
6. На прямой $l: 3x+2y-1=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(-1,4)$ и $B(3,2)$.
7. Найти точку, симметричную точке $A(2,-2)$ относительно прямой $l: 2x+y-3=0$.
8. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $l_1: x-y-3=0$ относительно прямой $l_2: x+3y+1=0$.
9. Найти длину высоты AH треугольника ABC, если $A(-2,-2)$, $B(3,1)$, $C(1,-3)$.
10. К окружности $(x+1)^2+(y-3)^2=36$ провести касательные, параллельные прямой $l: 4x-3y+3=0$.
11. Найти угол между прямыми $y=1$ и $3x-4y-1=0$.
12. Изобразить эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, его фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.
13. Составить каноническое уравнение эллипса, точка $A\left(2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$ принадлежит эллипсу, а фокусы находятся в точках $(\pm 2,0)$.
14. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой модуль разности расстояний до точек $F_1(1,0)$ и $F_2(-1,0)$ равен 4.
15. Изобразить гиперболу $x^2-4y^2=1$, ее фокусы, директрисы, найти эксцентриситет.

16. Составить уравнение гиперболы, если точка $A(-2,4)$ лежит на гиперболе, а асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{1}{2}x$.
17. Изобразить параболу $x^2=-6y$, ее фокус, директрису.

Задания для подготовки к контрольной работе №3.

1. Даны координаты вершин $A(0,-1,1)$, $B(1,3,-3)$, $B_1(-1,2,0)$, $C_1(3,0,1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты остальных вершин, а также длину диагоналей параллелепипеда.
2. Пусть $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=3, \widehat{(\bar{a},\bar{b})}=30°, \overline{AB}=2\bar{a}+\bar{b}, \overline{AC}=\bar{a}-\bar{b}$. Найти площадь треугольника ABC.
3. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1,1,0)$, $B(-1,0,2)$, $C(0,-3,2)$.
4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F делят ребра BB_1 и CC_1 в отношениях 1:1 и 1:2 соответственно. Найти площадь треугольника DEF.
5. Найти высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D, если $A(2,0,2)$, $B(-1,-1,1)$, $C(0,0,-1)$, $D(1,-3,2)$.
6. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\overline{AB}(0,1,-1)$, $\overline{AC}(2,-1,-3)$, $\overline{AA_1}(-3,0,2)$. Найти объем, площадь основания и высоту призмы.
7. В тетраэдре $ABCD$ $A(1,0,-1), B(2,1,3), C(-1,1,0), D(2,-1,0).$ Составить уравнение грани ACD и найти высоту BH тетраэдра.
8. Составить уравнение плоскости, которая касается сферы $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ в точке $A(1,1,-2)$.
9. Составить уравнение плоскостей, которые параллельны плоскости $2x+2y-z+5=0$ и касаются сферы $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=49$.
10. Написать уравнение сферы, вписанной в тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $x+2y-2z+8=0$.
11. Найти угол между плоскостями $2x-3z=0$ и $x+3y-2=0$.

Задания для подготовки к контрольной работе №4.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4,2,-3)$.
2. Найти угол между прямой $x=1+6t,\ y=-3t,\ z=-1+2t$ и плоскостью $2x+4y+2z-1=0$.
3. Определить взаимное расположение прямых $\begin{cases}x+z-8=0,\\ 2y+3z-7=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x+z-8=0,\\ 2y+3z-7=0.\end{cases}$
4. Определить взаимное расположение прямой и плоскости, в случае пересечения найти угол между ними и точку пересечения

   а) $l:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1},\quad \Pi:3x+5y-z=0;$

   б) $l:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3},\quad \Pi:6x-6y+4z+1=0.$
5. На прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{2}$ найти точку, равноудаленную от точек $A(2,-4,-1)$ и $B(-4,2,-1)$.

6. Найти точку, симметричную точке $M(1,2,0)$ относительно плоскости $2x-3y+6=0$.
7. Найти точку, симметричную точке $M(-3,0,3)$ относительно прямой $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$.
8. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$.
9. Найти общий перпендикуляр к прямым $l_1:\begin{cases}x=3t,\\ y=1-2t,\\ z=2t\end{cases}$ и $l_2:\begin{cases}x=-1+t,\\ y=2t,\\ z=1.\end{cases}$
10. Найти параметрическое представление прямой, которая проходит через точку $M(0,2,1)$ и пересекает каждую из прямых $l_1:\begin{cases}x=t,\\ y=1,\\ z=3+t\end{cases}$ и $l_2:\begin{cases}x=2+3t,\\ y=3-t,\\ z=t.\end{cases}$
11. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой около оси

    а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\ Ox$; б) $9y^2-4x^2=36,\ Oy$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\ Oz$.
12. Изобразить поверхности, используя метод сечений

    а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$; б) $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$.
13. Изобразить поверхность $4x^2-y^2+8z^2-8x-8y-48z+76=0$ вместе с системой координат
14. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности $\Phi: 9x^2+4y^2-z^2=36$, проходящих через точку $M\left(-2,-1,2\right)$.

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Направленные отрезки. Геометрические векторы. Длина вектора. Коллинеарные, равные, противоположные векторы.
2. Линейные операции над векторами и их основные свойства.
3. Определение векторного пространства. Примеры векторных пространств.
4. Простейшие свойства векторных пространств.
5. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Критерий линейной зависимости и независимости. Основная теорема о линейной зависимости.
6. Базис и размерность векторного пространства. Примеры векторных пространств различной размерности.
7. Координаты вектора в данном базисе. Координатные строки суммы двух векторов и произведения числа на вектор.
8. Теорема о базисе в n-мерном векторном пространстве.
9. Скалярное произведение геометрических векторов и его связь с длинами и углами. Скалярный квадрат. Основные свойства скалярного произведения.
10. Ортогональные векторы. Нормированный вектор. Ортонормированный базис геометрических векторов плоскости и пространства. Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе.
11. Ортонормированность базиса, в котором скалярное произведение вычисляется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_i a_i\cdot b_i$. Вычисление координат вектора в ортонормированном базисе.
12. Аффинная система координат плоскости (аффинный репер). Аффинные координаты точки плоскости. Простейшие задачи.

13. Простое отношение трех коллинеарных точек. Вычисление аффинных координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.
14. Формулы преобразования координат векторов и точек плоскости.
15. Декартова система координат на плоскости. Расстояние между двумя точками плоскости в декартовой системе координат. Формулы преобразования декартовых координат точек плоскости при параллельном переносе и повороте системы координат.
16. Понятие об уравнении плоской кривой. Две основные задачи теории плоских кривых. Пример окружности.
17. Направляющий вектор прямой. Параметрическое представление прямой. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой по двум точкам.
18. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Теорема о направляющем векторе прямой, заданной общим уравнением.
19. Три случая расположения двух прямых на плоскости. Теорема о взаимном расположении двух прямых, заданных общими уравнениями и следствия из нее.
20. Полуплоскости относительно данной прямой. Критерий принадлежности двух точек одной полуплоскости относительно прямой, заданной общим уравнением. Геометрический смысл линейного неравенства.
21. Вектор нормали прямой. Вектор нормали прямой, заданной общим уравнением в декартовой системе координат. Уравнение прямой по точке и вектору нормали.
22. Формула расстояния от точки до прямой в декартовой системе координат.
23. Угол между двумя прямыми, заданными общими уравнениями в декартовой системе координат. Пример.
24. Полярные координаты на плоскости. Их связь с соответствующими декартовыми координатами.
25. Коническое сечение. Фокус и директриса конического сечения. Теорема об отношении расстояния точки конического сечения до фокуса к расстоянию этой точки до директрисы.
26. Второе определение конического сечения. Эксцентриситет. Эллипс, парабола, гипербола.
27. Уравнение конического сечения в полярных координатах.
28. Уравнения конических сечений в декартовых координатах. Случай параболы.
29. Уравнения конических сечений в декартовых координатах. Случай эллипса.
30. Уравнения конических сечений в декартовых координатах. Случай гиперболы.
31. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению.
32. Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению.
33. Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению.
34. Фокальные свойства эллипса.
35. Фокальные свойства гиперболы.
36. Фокальные свойства параболы.
37. Биссекториальное свойство конических сечений. Теорема о касательной к коническому сечению.
38. Оптические свойства конических сечений.
39. Диаметры конических сечений. Сопряженные диаметры. Главные диаметры.
40. Кривые 2-го порядка. Примеры.
41. Теорема о классификации кривых 2-го порядка. Схема доказательства.
42. Приведение общего уравнения кривой 2-го порядка к упрощенному виду.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Аффинная и система координат в пространстве. Декартова система координат.
2. Векторное произведение векторов пространства и его свойства. Геометрический смысл модуля векторного произведения.

3. Векторное произведение векторов. Вычисление векторного произведения в правом ортонормированном базисе.
4. Смешанное произведение векторов пространства. Геометрический смысл модуля смешанного произведения. Смешанное произведение компланарных векторов.
5. Смешанное произведение векторов пространства. Вычисление смешанного произведения в правом ортонормированном базисе. Свойства смешанного произведения.
6. Формулы преобразования координат точек пространства.
7. Уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным направляющим векторам, по точке и вектору нормали. Общее уравнение плоскости.
8. Взаимное расположение 2-х плоскостей. Угол между плоскостями.
9. Расстояние от точки до плоскости. Полупространства.
10. Прямая в пространстве. Каноническое уравнение прямой, параметрическое представление прямой. Прямая как пересечение двух плоскостей.
11. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
12. Взаимное расположение прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью.
13. Поверхности второго порядка. Пример сферы.
14. Метод сечений.
15. Поверхности вращения.
16. Эллипсоид.
17. Цилиндрические поверхности.
18. Конус 2-го порядка.
19. Однополостный гиперболоид.
20. Двуполостный гиперболоид.
21. Эллиптический параболоид.
22. Гиперболический параболоид.
23. Линейчатые поверхности второго порядка.
24. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера о многогранниках.
25. Правильные многогранники.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: В 2 ч. М., Просвещение,1986, Ч.1, 336 с., 1987. Ч.2. - 352 с.

2. Жафяров А.Ж. Геометрия: В 2 ч.: Сибирское университетское издательство. Новосибирск, 2002. Ч.1. - 271 с., 2003. Ч.2. - 267 с.

3. Немченко К.Э. Аналитическая геометрия. М., ЭКСМО, 2007. - 352 с.

4. Постников М.М. Аналитическая геометрии. М., Наука, 1987. - 336 с.

5. Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия. М., Просвещение, 1965. - 368 с.

6. Атанасян Л.С. и др. Сборник задач по геометрии: В 2 ч. М., Просвещение, 1973. Ч.1, 256 с., 1975. Ч.2. - 176 с.

7. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1980. - 238 с.

8. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1954. - 175 с.

Дополнительная литература

9. Базылев В.Т., Дуничев К.И. и др. Геометрия: В 2 ч. М., Просвещение, М.,1974. Ч.1. - 351 с., 1975, Ч.2. - 367 с.

10. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия: В 2 ч. М., Просвещение, 1976, Ч.2. - 447с.

11. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. В 2 ч. Мн., Вышэйшая школа, 2001. Ч.1. - 302 с.

12. Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Мн., Вышэйшая школа, 1967. - 240 с.

13. Аргунов Б.И., Балк Н.В. Геометрические построения на плоскости. М., Учпедгиз, 1957. – 266 с.