

§ 34. Основы квантовой механики

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m\nu},$$

где h – постоянная Планка, m и ν – масса и скорость частицы.

Импульс частицы

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора \vec{k} .

Фазовая скорость волн де Бройля

$$v = \frac{\omega}{k},$$

групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk},$$

где ω – циклическая частота.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга для координаты и проекции импульса частицы

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar;$$

для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

Временное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа; i – мнимая единица; $U(x, y, z)$ – потенциальная энергия частицы; $\Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы.

Стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где E – полная энергия частицы.

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы

$$\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right).$$

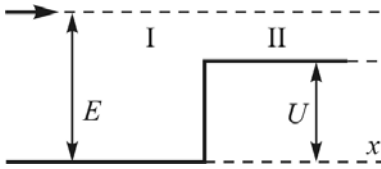


Рис. 34.1

Собственные значения энергии частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2.$$

Собственные значения энергии одномерного гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega.$$

Коэффициент прозрачности потенциального барьера

$$D = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx \right],$$

где x_1 и x_2 – границы барьера.

Коэффициенты отражения (R) и прохождения (C) волн де Бройля через низкий потенциальный барьер бесконечной ширины (рис. 34.1):

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \text{ и } C = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

где k_1 и k_2 – волновые числа волн де Бройля в областях I и II.

Коэффициент преломления волн де Бройля на границе низкого потенциального барьера

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1},$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн де Бройля в областях I и II при движении частицы из области I в II.

Волновые свойства частиц

34.1. Синхрофазотрон дает ускоренный пучок протонов с энергией 8,0 ГэВ. Какая длина волны де Бройля соответствует протону данного пучка?

34.2. Бетатрон ускоряет электроны до энергии 50 МэВ. Определите длину волны де Бройля, которая соответствует ускоренному электрону.

34.3. Определите разность потенциалов, ускоряющую электрон, в результате чего его волна де Бройля становится равной 200 пм.

34.4. Определите длину волны де Бройля, соответствующую движению молекулы водорода ($M = 2$ г/моль) при температуре 27,0 °С.

34.5. Частица вещества, радиус которой 1,0 мкм и плотность 2600 кг/м³, обладает кинетической энергией 20 пэВ. Определите длину волны де Бройля, соответствующую движению этой частицы.

34.6. Движению заряженной частицы в электрическом поле с разностью потенциалов 200 В соответствует длина волны де Бройля 2,03 пм. Определите массу этой частицы, если ее заряд по абсолютной величине равен заряду электрона.

34.7. Протону, движущемуся по окружности радиусом 1,0 см в однородном магнитном поле, соответствует длина волны де Бройля 10 пм. Определите магнитную индукцию этого поля.

34.8. Определите кинетическую энергию протона, для которого комптоновская и дебройлевская длины волн равны.

34.9. Определите длину волны де Бройля, соответствующую движению молекул кислорода ($M = 32$ г/моль) при температуре 300 К.

34.10. Определите длину волны де Бройля, соответствующую фотозлектрону, который вырывается с поверхности цезия ($A = 1,97$ эВ) под воздействием излучения с длиной волны 75 нм.

34.11. В опыте Девиссона и Джермера электронный пучок, прошедший ускоряющую разность потенциалов 200 В, нормально падал на монокристалл с постоянной решетки 350 пм. Под каким углом наблюдался второй дифракционный максимум?

34.12. Определите диаметр первого кольца электронограммы, полученной в опыте Томсона и Тартаковского при следующих

параметрах экспериментальной ля до экрана 0,3 м; угол дифракции – 5° ; ускоряющая разность потенциалов 50 кВ.

34.13. Электронный пучок при прохождении щели шириной 0,50 мкм создает дифракционную картину на экране, расположенном на расстоянии 50 см от щели. Определите скорость электронов, если ширина центрального дифракционного максимума 0,15 мм.

34.14. Ускоренный пучок электронов падает нормально на диафрагму с двумя щелями, расстояние между которыми 50 мкм. На экране, который находится на расстоянии 70 см от диафрагмы, возникает дифракционная картина. Расстояние между соседними дифракционными максимумами равно 4,0 мкм. Определите разность потенциалов, ускоряющую эти электроны.

34.15. Определите неопределенность проекции импульса частицы, если неопределенность ее координаты при прямолинейном движении равна 1,0 нм.

34.16. Определите неопределенность проекции скорости для шарика массой 1,0 г и электрона при одинаковой неопределенности их координаты, равной $1,0 \cdot 10^{-7}$ м. Какие выводы из полученного результата можно при этом сделать?

34.17. Определите неопределенность координаты молекулы аргона ($M = 40$ г/моль), которая участвует в тепловом движении при температуре 500 К.

34.18. Оцените относительную неопределенность проекции скорости электрона с кинетической энергией 5 эВ, который находится в области пространства размером 0,1 нм.

34.19. Какой кинетической энергией должен обладать электрон, чтобы он смог проникнуть в ядро атома, размеры которого $1,0 \cdot 10^{-15}$ м?

34.20. Оцените кинетическую энергию электронов проводимости в металле, если их концентрация равна $1,0 \cdot 10^{23}$ см $^{-3}$.

34.21. Оцените наибольшую энергию связи электрона в области пространства, радиус которого равен радиусу атомного ядра ($r \approx 1,0 \cdot 10^{-15}$ м) (см. условие задачи № 34.39). По полученным результатам сделайте соответствующие выводы.

34.22. Электрон движется в бетатроне по окружности радиусом 2,5 м со скоростью $0,99c$. Определите неопределенность проекции скорости электрона, если радиус его траектории определен с точностью $20 \cdot 10^{-4} \%$.

34.23. Скорость электрона в атоме водорода приблизительно равна 1 Мм/с. Радиус атома $\sim 5 \cdot 10^{-11}$ м. Неопределенность радиуса орбиты электрона составляет 1 % от радиуса атома. Имеет ли смысл говорить о движении электрона по определенной орбите?

34.24. В тепловом равновесии в воздухе при нормальных условиях ($T_0 = 273$ К, $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па) находятся сферические пылинки массой $1 \cdot 10^{-15}$ г. Плотность вещества пылинок $2 \cdot 10^3$ кг/м³. Можно ли установить отклонение движения пылинок от законов классической механики?

34.25. Из общего временного уравнения Шредингера получите стационарное уравнение Шредингера.

34.26. Получите стационарное уравнение Шредингера для электрона, который находится в атоме водорода.

34.27. Получите стационарное уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора, на который действует квазиупругая сила.

34.28. В глубокой потенциальной яме в основном состоянии находится электрон. Оцените силу, с которой электрон действует на стенку ямы, ширина которой 0,10 нм.

34.29. Какую энергию необходимо затратить, чтобы перевести линейный гармонический осциллятор на первый возбужденный уровень? Собственная частота колебаний осциллятора $1,5 \cdot 10^{14}$ Гц.

34.30. Электрон находится в глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,50 нм. Определите наименьшую разность энергий двух соседних энергетических уровней.

34.31. Определите вероятность прохождения электроном потенциального барьера шириной 0,5 нм и высотой 0,4 эВ, если электрон ускоряется электрическим полем с разностью потенциалов 0,3 В.

34.32. На низкий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины (рис. 34.1) падает поток электронов с энергией

100 эВ. Определите высоту барьера, если 10 % электронов отражается.

34.33. Определите отношение высоты низкого прямоугольного потенциального барьера бесконечной ширины (рис. 34.1) к энергии электронов, падающих на него, если коэффициент отражения электрона от барьера равен коэффициенту прохождения электрона через барьер.

34.34. При прохождении низкого потенциального барьера бесконечной ширины (рис. 34.1) протоном с энергией 1,0 МэВ его дебройлевская длина волны изменилась на 1,0 %. Определите высоту этого барьера.

34.35. Протон и электрон ускоряются одинаковой по модулю разностью потенциалов 10 кВ и проходят через потенциальный барьер высотой 20 кэВ и шириной 0,10 пм. Как отличаются коэффициенты прозрачности барьера для этих частиц?

34.36. Определите плотность потока электронов, прошедших через низкий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины, высота которого $U = 0,91$ эВ. Энергия электронов, падающих на барьер, равна $E = 1,0$ эВ, а плотность электронного потока $j_0 = 10$ Вт/м².