

§ 36. Основы физики твердого тела

Функция распределения Ферми – Дирака определяет вероятность нахождения квантовой частицы на энергетическом уровне с энергией E_i при данной температуре T

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E_i - E_F)/(kT)} + 1},$$

где E_i – энергия энергетического уровня, E_F – энергия уровня Ферми.

Энергия уровня Ферми в металле при $T = 0$ К

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}},$$

где m – масса электрона, n – электронная концентрация в металле.

Температура Ферми

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k},$$

где k – постоянная Больцмана.

Средняя энергия электрона в металле

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F(0).$$

Молярная теплоемкость кристалла (теория Эйнштейна)

$$C = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp(\Theta_E/T)}{[\exp(\Theta_E/T) - 1]^2},$$

где R – универсальная газовая постоянная, $\Theta_E = \hbar\omega/k$ – характеристическая температура Эйнштейна.

Энергия нулевых колебаний в кристалле по теории Эйнштейна

$$E_0 = \frac{3}{2} R \Theta_E.$$

Молярная теплоемкость кристалла (теория Дебая)

$$C = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3\Theta_D/T}{e^{\Theta_D/T} - 1} \right],$$

где $\Theta_D = \hbar\omega_{\max}/k$ – характеристическая температура Дебая, $x = \hbar\omega/(kT)$ – переменная.

Энергия нулевых колебаний в кристалле по теории Дебая

$$E_0 = \frac{9}{8} R \Theta_D.$$

Молярная теплоемкость электронного газа

$$C \approx \frac{2RT}{T_F}.$$

Подвижность носителей электрического заряда

$$b = \frac{v_{др}}{E} = \frac{e\tau}{m},$$

где $v_{др}$ – дрейфовая скорость электронов, E – напряженность электрического поля, τ – время релаксации.

Удельная электропроводимость металла

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \text{ или } \sigma = enb.$$

Удельная электропроводимость собственных полупроводников

$$\sigma = en_e b_e + en_d b_d, \text{ или } \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где ΔE – ширина запрещенной зоны полупроводника, n_e и n_d – концентрация электронов и дырок.

Изменение концентрации неравновесных носителей заряда

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где τ – время жизни неравновесных носителей, Δn_0 – стационарная концентрация избыточных электронов.

Отношение коэффициента теплопроводности χ к удельной электропроводимости σ металла определяется *законом Видемана – Франца*

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

где k – постоянная Больцмана.

Энергия Ферми. Теплоемкость твердых тел

36.1. Докажите, что вероятность нахождения электронов проводимости в металле на уровнях, лежащих выше уровня Ферми, при $T = 0$ К равна 0.

36.2. Докажите, что вероятность нахождения электронов проводимости в металле на уровнях, лежащих ниже уровня Ферми, при $T = 0$ К равна 1.

36.3. При какой температуре произошел переход электрона проводимости на уровень, который лежит выше уровня Ферми на 0,15 эВ? Вероятность такого перехода равна 0,15 %.

36.4. Определите энергию уровня, на который произошел переход электрона проводимости в натрии ($M = 23$ г/моль, $\rho = 970$ кг/м³) при температуре $T = 400$ К, если вероятность такого перехода равна $f(E) = 1,0$ %.

36.5. Определите импульс электрона, находящегося на уровне Ферми меди ($M = 64$ г/моль, $\rho = 8900$ кг/м³).

36.6. Среднее значение энергии свободных электронов в металле при $T = 0$ К равно 3,0 эВ. Определите электронную концентрацию для этого металла.

36.7. Определите долю электронов проводимости в металле при $T = 0$ К, если эти электроны обладают кинетической энергией, превышающей половину максимальной энергии.

36.8. Определите давление электронного газа в натрии при $T = 0$ К, если электронная концентрация равна $2,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Использовать основное уравнение МКТ для идеального газа.

36.9. Определите температуру, при которой средние энергии электронов классического и квантового газа будут равными. В качестве металла взять медь (см. № 36.10).

36.10. Оцените долю тех электронов проводимости в калии ($M = 39$ г/моль, $\rho = 870$ кг/м³) которые при нагревании калия до $T = 500$ К будут находиться на уровнях, лежащих выше уровня Ферми.

36.11. Доля электронов проводимости в натрии, которые находятся на уровнях, лежащих выше уровня Ферми при $T = 400$ К, составляет 0,55 %. Определите энергию уровня Ферми для натрия.

36.12. Доля электронов проводимости в меди ($M = 64$ г/моль, $\rho = 8900$ кг/м³), которые находятся на уровнях, лежащих выше уровня Ферми, равна $2,5 \cdot 10^{-3}$. При какой температуре находится электронный газ?

36.13. Световой поток передает водяной ($c = 4190$ Дж/(кг·К)) росинке массой 1,0 мг энергию, равную энергии уровня Ферми для меди при $T = 0$ К. Как изменится при этом температура росинки?

36.14. Какой области излучения соответствует фотон, энергия которого равна энергии уровня Ферми для серебра ($M = 108$ г/моль, $\rho = 10500$ кг/м³) при $T = 0$ К?

36.15. Определите относительную погрешность, которая будет допущена при определении теплоемкости кристалла, если вместо закона Дебая ($T = \Theta_D$) использовать закон Дюлонга и Пти.

36.16. Определите относительную погрешность, которая будет допущена при определении теплоемкости кристалла, если вместо закона Эйнштейна ($T = \Theta_E$) использовать закон Дюлонга и Пти.

36.17. Получите выражение для молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll \Theta_E$) согласно теории Эйнштейна.

36.18. Получите выражение для молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll \Theta_D$) согласно теории Дебая.

36.19. Покажите, что при высоких температурах ($T \gg \Theta_D$) из закона Дебая следует закон Дюлонга и Пти.

36.20. Покажите, что при высоких температурах ($T \gg \Theta_E$) из закона Эйнштейна следует закон Дюлонга и Пти.

36.21. Определите молярную теплоемкость кристалла при температуре 2,0 К, если его характеристическая температура Дебая равна 310 К.

36.22. Определите длину волны, соответствующую фотону, энергия которого равна энергии фонона, возбуждающегося в кристалле, для которого характеристическая температура Эйнштейна 300 К.

36.23. Какое количество теплоты необходимо передать кристаллу меди ($M = 64$ г/моль) массой $m = 25$ г, чтобы увеличить его температуру от $T_1 = 8,0$ К до $T_2 = 10$ К? Характеристическая температура Дебая для меди $\Theta_D = 310$ К.

36.24. Определите температуру Дебая для алюминия, если известно, что при нагревании алюминия массой 20 г от 5,0 К до 10 К было затрачено 54 мДж теплоты.

36.25. Определите характеристическую температуру Дебая для кристалла, если при температуре 70 К отношение квантовой молярной теплоемкости к классической равно 0,65.

36.26. Температуру кристалла NaCl массой 10 г, который находится при температуре 320 К, равной характеристической температуре Дебая, увеличивают на 40 К. Сколько теплоты при этом было затрачено?

36.27. Определите температуру электронного газа, теплоемкость которого равна $C_V = 40$ Дж/(К·м³), температура Ферми $T_F = 75,4$ кК, а электронная концентрация $n_e = 2,2 \cdot 10^{28}$ м⁻³.

36.28. Во сколько раз увеличилась температура кристалла NaCl массой 10 г, который находился при температуре 2 К и в результате нагревания получил 0,6 мДж теплоты? Характеристическая температура Дебая для кристалла NaCl равна 320 К.

36.29. Определите массу кристалла CaCl₂, которому передано 5 мДж теплоты. При этом его температура увеличилась от 3 К до 6 К. Характеристическая температура Дебая для этого кристалла 310 К.

36.30. Определите молярную теплоемкость кристалла NaCl при температуре 32 К, если его характеристическая температура Эйнштейна равна 320 К.

Электропроводимость проводников и полупроводников

36.31. Концентрация электронов проводимости серебра ($\rho = 1,58 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) равна $6,0 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Определите дрейфовую скорость электронов при напряженности электрического поля 2,0 В/см.

36.32. Алюминиевый ($\rho = 2,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) проводник находится в электрическом поле. Определите напряженность этого поля, если концентрация электронов проводимости в алюминии $5,0 \cdot 10^{28}$ м⁻³, а их дрейфовая скорость 0,95 м/с.

36.33. Удельное сопротивление вольфрама $5,3 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, концентрация свободных электронов $5,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Определите время релаксации для этих электронов.

36.34. В твердом состоянии каждый атом серебра ($M = 108$ г/моль, $\rho_{\text{пл}} = 10500$ кг/м³) отдает в зону проводимости один валентный электрон. Время релаксации этого электрона равно $\tau = 3,85 \cdot 10^{-14}$ с. Определите удельное сопротивление серебра.

36.35. Определите удельную проводимость меди ($M = 64$ г/моль, $\rho = 8900$ кг/м³), если известно, что в твердом состоянии каждый атом меди отдает в зону проводимости один валентный электрон, подвижность которого равна $b = 4,4 \cdot 10^{-3}$ м²/(В·с).

36.36. Определите температуру, при которой отношение коэффициента теплопроводности к удельной электропроводимости алюминия равно 6,70 мкВт·Ом/К.

36.37. Определите длину свободного пробега электронов в металле, удельная электропроводимости которого равна $1,13 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹. Средняя скорость хаотического движения электронов 1 Мм/с, а их концентрация $1 \cdot 10^{23}$ см⁻³.

36.38. Коэффициент теплопроводности свинца при комнатной температуре равен $34,8 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Определите электронную концентрацию, если подвижность электрона в свинце $4,5\cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

36.39. Собственный полупроводник (германий) при определенной температуре имеет удельное сопротивление, равное $0,48 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Определите концентрацию носителей заряда в этом полупроводнике, если подвижность электронов – $0,38 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, дырок – $0,18 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

36.40. Красная граница фотопроводимости чистого германия равна $\lambda_0 = 1,7 \text{ мкм}$. Определите температурный коэффициент сопротивления германия при комнатной температуре ($t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$).

36.41. Удельная электропроводимость полупроводника p -типа $112 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Определите подвижность дырок, если постоянная Холла для этого вещества $3,66\cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$.

36.42. Эффект Холла ($\Delta\varphi = 2,8 \text{ В}$) возникает в пластине из чистого кремния шириной $a = 2 \text{ см}$, находящейся в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0,5 \text{ Тл}$. Определите концентрацию носителей зарядов, если плотность тока в пластине $j = 2 \text{ мкА}/\text{мм}^2$.

36.43. При облучении светом полупроводника при комнатной температуре ($t^\circ = 20 \text{ }^\circ\text{C}$) его удельная электропроводимость изменилась от $\sigma = 2,0 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$ до $\sigma_1 = 2,5 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Если источник облучения выключить, то через $t = 8,0 \text{ мс}$ она становится равной $\sigma_2 = 2,2 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$. Определите время жизни носителей зарядов.