

## § 2. Основное уравнение динамики материальной точки и системы материальных точек

Динамика изучает движение *материальной точки* и *твердого тела* с учетом причин, обуславливающих тот или иной характер движения. Механическое движение тел изменяется в результате их *взаимодействия*. Мерой такого взаимодействия является *сила*. Если взаимодействие между материальной точкой и внешними объектами осуществляется с помощью нескольких сил, то их действие можно заменить действием одной силы  $\vec{F}$ , называемой *равнодействующей*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

*Основное уравнение динамики* материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где  $\vec{p} = m\vec{v}$  – *импульс материальной точки*;  $m$  – ее *масса*;  $\vec{v}$  – *скорость*.

Если масса постоянна, то

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F},$$

где  $\vec{a}$  – *ускорение*, приобретаемое материальной точкой массы  $m$  под действием *равнодействующей силы*  $\vec{F}$ .

Это же уравнение в проекциях на *касательную* и *нормаль* к траектории точки

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{r} = F_n,$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории.

*Поступательное движение системы материальных точек* как целого можно характеризовать движением одной точки  $c$  – *центра масс системы*

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F},$$

где  $m = \sum_i m_i$  – суммарная масса всех частиц рассматриваемой системы;  $\vec{F}$  – равнодействующая сила;  $\vec{v}_c$  – скорость движения центра масс.

*Радиус-вектор*  $\vec{r}_c$ , определяющий положение центра масс механической системы в пространстве относительно произвольной точки  $O$ :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i},$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й частицы системы;  $\vec{r}_i$  – ее радиус-вектор с началом в точке  $O$ .

*Координаты центра масс механической системы* можно определить формулами:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i},$$

где  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс;  $m, x, y, z$  – массы и координаты материальных точек или тел, составляющих систему.

*Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского):*

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt} + \vec{F},$$

где  $\vec{u}$  – скорость отделяемых (присоединяемых) частиц относительно движущегося тела, т. е. их относительная скорость.

*Скорость ракеты (формула Циолковского):*

$$v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

где  $u$  – скорость частиц относительно ракеты;  $m_0$  и  $m$  – начальная и текущая масса ракеты.

*Сила трения скольжения:*

$$F = \mu N,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения;  $N$  – сила нормального давления.

**2.1.** Поезд массой  $m = 1500$  т, двигаясь с постоянным ускорением, через промежуток времени  $t = 3,0$  мин после начала движения по горизонтальному участку пути приобрел скорость  $v = 50$  км/ч. Определите силу тяги тепловоза, если коэффициент трения во время движения  $\mu = 0,060$ .

**2.2.** Парашютист массой  $m = 80$  кг покидает самолет. Пролетев в свободном падении расстояние  $h = 120$  м, он раскрыл парашют, после чего в течение времени  $t = 5,0$  с скорость парашютиста уменьшилась до  $v = 4,0$  м/с. Определите наибольшую силу натяжения каждого из двух тросов, с помощью которых парашютист был соединен с парашютом.

**2.3.** Определите смещение пули от центра мишени под действием ветра, дующего под углом  $\alpha = 90^\circ$  к траектории ее движения, если известно, что на пулю массой  $m = 6,0$  г при стрельбе из винтовки с дистанции 200 м со стороны ветра действует сила  $F = 2,5$  мН. Скорость пули принять постоянной и равной  $v = 500$  м/с.

**2.4.** Установившаяся скорость движения парашютиста массой  $m_1$  с раскрытым парашютом равна  $v_1$ . Чему будет равна установившаяся скорость спуска на этом парашюте другого парашютиста, если его масса  $m_2$ ? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

**2.5.** Через неподвижный блок перекинут шнур, к одному из концов которого прикреплен груз массой  $m_1 = 70$  кг. На другом конце шнура повис человек массой  $m_2 = 72$  кг, который, выбирая шнур, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от пола. Определите, через какое время груз будет поднят на высоту  $h = 2,0$  м. Массой шнура и блока пренебречь.

**2.6.** Определите ускорение лифта, считая его одинаковым по модулю при разгоне и торможении, если известно, что вес человека, находящегося в лифте, при разгоне в  $k = 2,2$  раз больше, чем при торможении.

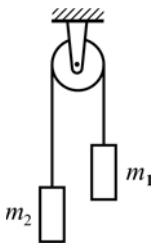


Рис. 2.1

**2.7.** Два груза общей массой  $0,80$  кг закреплены на концах нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 2.1). Найдите массы обоих грузов, если известно, что они движутся с ускорением  $a = 0,25g$ , направленным для правого груза вниз. Массой блока и нити, а также трением в оси блока пренебречь.

**2.8.** С каким ускорением будет двигаться система грузов, изображенная на рис. 2.2, если коэффициент трения скольжения груза массой  $2m$  о поверхность стола  $\mu$ ? Трением в блоках пренебречь.

**2.9.** Брусок массой  $m$  находится на наклонной плоскости с углом наклона  $30^\circ$ , движущейся ускоренно в горизонтальном направлении. При каком максимальном ускорении брусок будет оставаться еще неподвижным относительно призмы? Трением между бруском и плоскостью пренебречь.

**2.10.** Тело массой  $m$ , находящееся на вершине наклонной плоскости ( $l = 1$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ), удерживается силой трения. Коэффициент трения между телом и плоскостью  $0,45$ . За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением  $1,0$  м/с<sup>2</sup>?

**2.11.** Аэростат, имеющий вместе с балластом массу  $m$ , опускается вниз с постоянным ускорением  $a$ . Сколько балласта нужно сбросить с аэростата, чтобы он двигался с прежним ускорением, но направленным вертикально вверх? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**2.12.** Во время движения на автомобиль действует сила трения, равная  $0,20$  его силы тяжести. Найдите силу тяги, развиваемую двигателем автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: 1) в гору с уклоном  $1,0$  м на каждые  $30$  м пути; 2) под гору с тем же уклоном. Масса автомобиля  $2,0$  т.

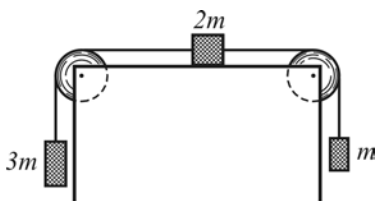


Рис. 2.2

**2.13.** Докажите, что тормозной путь автомобиля не зависит от массы перевозимого груза.

**2.14.** Почему при увеличении скорости автомобиля его ускорение уменьшается, несмотря на постоянную силу тяги и силу трения, действующие на автомобиль со стороны шоссе?

**2.15.** Через неподвижный невесомый блок перекинута нить, к концам которой подвешены два груза, массы которых  $m_1 = 0,50$  кг и  $m_2 = 0,75$  кг? В начальный момент грузы неподвижны и второй груз находится выше первого на величину  $h = 0,70$  м. Через какое время после начала движения грузы будут находиться на одинаковой высоте?

**2.16.** Поезд массой  $M$  двигался равномерно по горизонтальному пути. В некоторый момент от поезда отделилась часть вагонов общей массой  $m$ . По какому закону будет изменяться со временем расстояние  $s$  между частями состава (до остановки отцепившейся части состава)? Сила тяги локомотива остается постоянной, коэффициент трения  $\mu$ .

**2.17.** Скользящая по льду хоккейная шайба до удара о бортик прошла расстояние, равное  $s = 7,0$  м, а после удара, который можно считать абсолютно упругим, до остановки двигалась на протяжении интервала времени  $t = 2,5$  с. Определите начальную скорость шайбы, если коэффициент трения шайбы о лед  $\mu = 0,14$ .

**2.18.** На рис. 2.3 изображена система из двух брусков массами  $m_1 = 0,50$  кг и  $m_2 = 1,0$  кг, находящихся на горизонтальной гладкой поверхности и связанных нитью, перекинутой через невесомый блок. Определите силу, которую необходимо приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с ускорением  $a = 3,5$  м/с<sup>2</sup>, если коэффициент трения между брусками  $\mu = 0,40$ .

**2.19.** Определите импульс силы, полученный стенкой сосуда за время удара молекулы массой  $m = 5,3 \cdot 10^{-26}$  кг, летящей со скоростью  $v = 550$  м/с, если молекула ударяется о стенку под углом  $\alpha = 60^\circ$  к нормали и под таким же углом упруго отскакивает от нее без потери скорости.

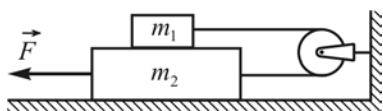


Рис. 2.3

**2.20.** На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 45^\circ$  находится

деревянный брусок массой  $m = 0,40$  кг. С какой минимальной силой необходимо прижимать брусок к плоскости, чтобы он находился на ней в покое, если коэффициент трения бруска о плоскость  $\mu = 0,20$  ?

**2.21.** Определите силу, приложенную к одному из концов однородного стержня длиной  $L = 3,0$  м, под действием которой он поднимается вертикально вверх, если известно, что при этом в сечении, находящемся на расстоянии  $l = 0,50$  м от его нижнего конца, стержень растянут с силой  $F_1 = 50$  Н.

**2.22.** По наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 60^\circ$ , начинает скользить тело без начальной скорости. Определите коэффициент трения  $\mu$  тела о плоскость, если, преодолев расстояние  $s = 43$  см, оно приобретает скорость  $v = 2,5$  м/с.

**2.23.** Сани скатываются с горы и скользят по горизонтальной ледяной поверхности. На какое расстояние сани переместятся по этой поверхности, если у подножия горы они достигают скорости 10 м/с, а коэффициент трения между полозьями и горизонтальной поверхностью льда  $\mu = 0,15$  ?

**2.24.** Кусок льда один раз бросают с некоторой скоростью под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, а другой раз пускают с такой же скоростью по горизонтальной поверхности льда. Определите коэффициент трения льда о лед, а также отношение пройденных в обоих случаях расстояний в горизонтальном направлении, если известно, что во втором случае брошенный кусок льда находился в движении в  $n = 5$  раз дольше, чем при полете в воздухе.

**2.25.** Однородный гибкий канат длиной  $L$  лежит на наклонной поверхности призмы, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, и один конец каната свисает вдоль вертикальной грани призмы. При какой наименьшей длине свисающей части канат начнет скользить, сползая с призмы, если коэффициент трения между канатом и призмой  $\mu$  ?

**2.26.** Шайба последовательно соскальзывает без начальной скорости за равные промежутки времени с двух наклонных плоскостей, имеющих одинаковые основания и углы наклона к

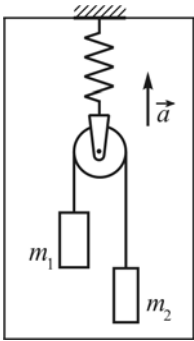


Рис. 2.4

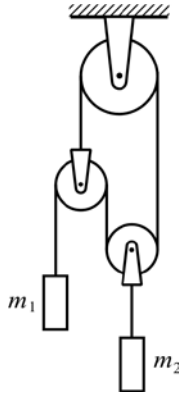


Рис. 2.5

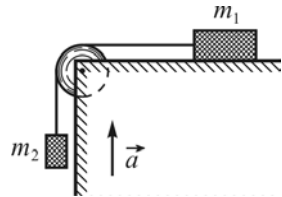


Рис. 2.6

горизонту соответственно  $\alpha = 45^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ . Определите коэффициент трения скольжения шайбы, считая, что в обоих случаях он одинаков.

**2.27.** К динамометру, подвешенному к потолку лифта, прикреплена система, состоящая из двух грузов массами  $m_1 = 3,5$  кг и  $m_2 = 1,5$  кг (рис. 2.4). Если грузы отпустить, то они будут двигаться относительно лифта с некоторым ускорением. Во сколько раз показания динамометра при движении грузов, когда лифт движется с ускорением  $a = 0,4g$ , направленным вверх, больше показания, когда лифт неподвижен?

**2.28.** Определите ускорение грузов в системе, изображенной на рис. 2.5. Массами блоков, нити и трением пренебречь. Рассмотреть возможные случаи.

**2.29.** Два груза соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок, укрепленный на конце стола, который находится в лифте, поднимающемся вверх с ускорением  $a = 2,5$  м/с<sup>2</sup>. Груз массой  $m_1 = 1,5$  кг находится на поверхности стола, а другой груз массой  $m_2 = 0,80$  кг висит на нити (рис. 2.6). Определите силу натяжения нити, если коэффициент трения груза  $m_1$  о стол  $\mu = 0,40$ . Как изменится сила натяжения, если массу второго груза увеличить вдвое?

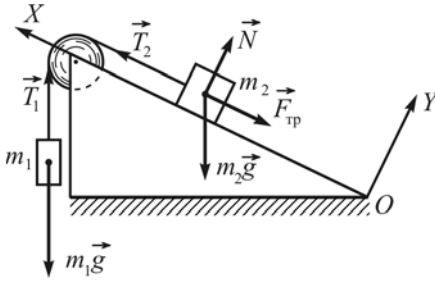


Рис. 2.7

**2.30.** Невесомый блок укреплен в верхней точке наклонной плоскости (рис. 2.7), образующей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Грузы массами  $m_1 = 2,0$  кг и  $m_2 = 1,5$  кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определите ускорение, с которым движутся грузы, и натяжение нити, если коэффициент трения груза  $m_2$  о

наклонную плоскость равен  $\mu = 0,15$ . Трением на оси блока пренебречь.

**2.31.** Наклонная плоскость образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . По ней пускают снизу вверх шайбу, которая в течение времени  $t_1 = 1,0$  с проходит расстояние  $l = 1,0$  м, после чего скатывается вниз. Определите интервал времени  $t_2$  соскальзывания шайбы вниз. Каков коэффициент трения  $\mu$  между шайбой и плоскостью?

**2.32.** В некоторый момент от поезда, состоящего из  $n$  вагонов и движущегося по горизонтальному участку со средней скоростью  $v_0$ , отцепляется  $k$  вагонов. Определите скорость головной части поезда в момент остановки отцепившихся вагонов, если коэффициент трения равен  $\mu$ , а сила тяги после разрыва не изменилась.

**2.33.** К динамометру, подвешенному в кабине лифта, прикреплен груз массой  $m = 10$  кг. Лифт движется вверх с одинаковым по модулю ускорением  $a = 2,1$  м/с<sup>2</sup> при разгоне и торможении. Как отличаются показания динамометра при разгоне и торможении?

**2.34.** Определите скорость ракеты с космонавтом при выходе из плотных слоев атмосферы, если максимальная перегрузка, испытываемая космонавтом, равна  $k = 7,7$ , а толщину плотных слоев атмосферы принять равной  $h = 15$  км.

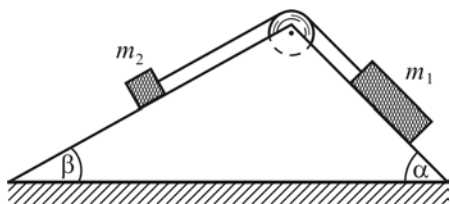


Рис. 2.8

**2.35.** Небольшая плоская шайба под действием толчка поднимается вверх по уклону в течение  $t_1 = 2,0$  с и до остановки проходит путь, равный  $s = 2,0$  м. После остановки шайба опускается вниз по уклону и тот же путь

проходит за промежуток времени  $t_2 = 3,0$  с. Пользуясь этими данными, определите коэффициент трения скольжения шайбы о наклонную плоскость.

**2.36.** Через блок, укрепленный на вершине призмы, боковые поверхности которой образуют углы  $\alpha = 45^\circ$  и  $\beta = 30^\circ$  с ее основанием, скользят два груза, соединенные нитью (рис. 2.8). Определите коэффициент трения  $\mu$  грузов о поверхность призмы, если они движутся с ускорением  $a = 1,6$  м/с<sup>2</sup>, а массы грузов  $m_1 = 2,5$  кг и  $m_2 = 0,75$  кг. Трением в блоке пренебречь.

**2.37.** Определите натяжение нити в предыдущей задаче, если оба груза одинаковой массы ( $m_1 = m_2 = 1$  кг), а коэффициент трения грузов о поверхность призмы  $\mu = 0,7$ .

**2.38.** Через неподвижный невесомый блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой подвешены два груза массами  $m_1 = 250$  г и  $m_2 = 500$  г. Первоначально грузы находились на одинаковой высоте, после чего системе грузов дали возможность двигаться. Определите время движения, за которое центр масс системы переместился на расстояние  $l = 0,49$  м.

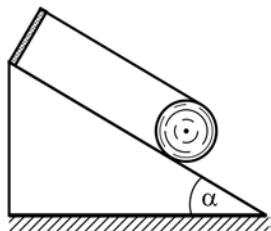


Рис. 2.9

**2.39.** На стойке, укрепленной в верхней точке наклонной плоскости, закреплена нить, конец которой намотан на цилиндр (рис. 2.9). При каком максимальном значении угла  $\alpha$  цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости, если коэффициент трения цилиндра о плоскость равен  $\mu$ ?

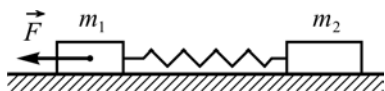


Рис. 2.10

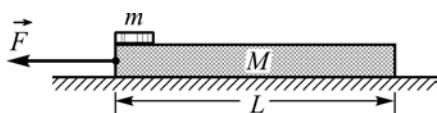


Рис. 2.11

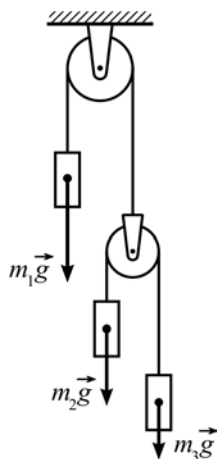


Рис. 2.12

**2.40.** На горизонтальной плоскости лежат два бруска, соединенные ненапряженной пружиной (рис. 2.10). Массы брусков  $m_1$  и  $m_2$ . Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся второй? Коэффициент трения брусков о плоскость равен  $\mu$ .

**2.41.** Брусок массой  $M$  и длиной  $L$  находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На переднем крае бруска лежит монета массой  $m$  (рис. 2.11). Определите модуль силы, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, под действием которой монета начнет скользить по бруску, если коэффициент трения между монетой и бруском равен  $\mu$ .

**2.42.** Три груза массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  подвешены на подвижном и неподвижном блоках, как показано на рис. 2.12. Определите ускорения движения грузов и силу натяжения нитей, если всю систему не удерживать? Массу подвижного блока не учитывать.

**2.43.** Через невесомый блок, установленный в верхней точке наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$ , переброшена легкая

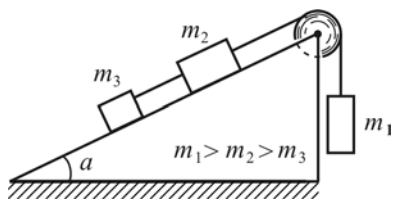


Рис. 2.13

нить, на которой закреплены три груза массами  $m_1 = 1,0$  кг,  $m_2 = 0,50$  кг и  $m_3 = 0,30$  кг (рис. 2.13). Грузам, которые первоначально были неподвижны, дают возможность двигаться. Определите натяжение нити, соединяющей грузы, находящиеся

на наклонной плоскости, если коэффициент трения между грузами и плоскостью  $\mu = 0,50$ .

**2.44.** По поверхности тела в форме трапеции с углами при основании  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2.14) движутся три тела, связанные нитями, перекинутыми через блоки. Известны массы тел  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ ; коэффициенты трения между телами и поверхностями, по которым они движутся, соответственно равны  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ . Определите путь, пройденный телами в первую секунду движения и силы натяжения нитей. Массой блоков и трением в них пренебречь.

**2.45.** Ракета взлетает вертикально вверх и достигает высоты  $h = 200$  м. Определите скорость  $u$  истечения газов из ракеты, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно, если масса конструкции ракеты  $M = 250$  г, а масса топлива с окислителем  $m = 100$  г.

**2.46.** Ракета, имеющая начальную массу  $m = 450$  г, начинает

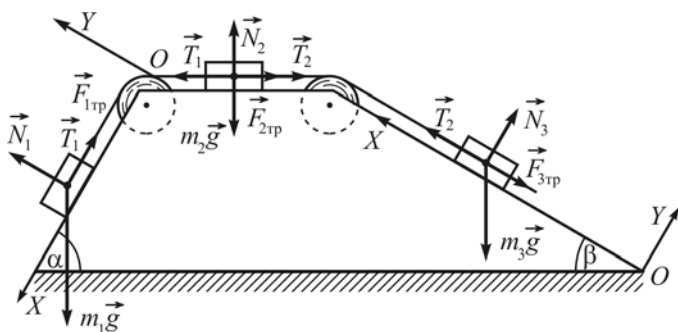


Рис. 2.14

двигаться, выбрасывая равномерной струей газы со скоростью  $u = 320$  м/с. Через какой интервал времени ракета достигнет скорости  $90$  м/с, если расход газа равен  $\mu = 80$  г/с? Какой максимальной скорости достигнет ракета, если масса ее топлива составляет  $\alpha = 0,70$  массы ракеты?

**2.47.** В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция продуктов сгорания топлива массой  $m$ . При этом скорость истечения газа постоянна. Пренебрегая действием силы тяжести, определите скорость ракеты через  $k$  секунд, если в начальный момент ракета массой  $M$  имела скорость  $v_0$ .