Рассмотрим два ***эталонных интеграла*** а) $\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и б) $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$, где $b > 0$.

$$a) \int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_b^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_b^A, & \alpha \neq 1, \\ \left(\ln x\right)_b^A, & \alpha = 1, \end{cases} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}\right), & \alpha \neq 1, \\ \ln A - \ln b, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha > 1$, то предел существует и равен $\frac{b^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$. При $\alpha \le 1$ предела не существует. Таким образом, интеграл $\int\limits_b^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

$$б) \int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_\delta^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_\delta^b, & \alpha \neq 1; \\ \left(\ln x\right)_\delta^b, & \alpha = 1; \end{cases} = \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}\right), & \alpha \neq 1, \\ \ln b - \ln \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha < 1$, то предел существует и равен $\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. При $\alpha \ge 1$ предела не существует. Таким образом, интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Пример 1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Функция $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \in C([0;+\infty))$ (f -- частное двух непрерывных на R функций). Следовательно $x = +\infty$ -- единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \lim_{t\to+\infty} arctg\, e^x \Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (arctg\, e^t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in R.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится по определению.

Пример 2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.

Функция $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \in C\left((0; \frac{\pi}{2}]\right)$, в точке $x = 0$ $f(x)$ не определена, причем $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$. Следовательно, функция $f(x)$ не ограничена в правосторонней окрестности точки $x = 0$, а потому точка $x = 0$ -- единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \lim_{t \to +0} \int\limits_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \lim_{t \to +0} \int\limits_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x) = \lim_{t \to +0} \frac{3}{2} (\sin x)^{\frac{2}{3}} \Big|_t^{\pi/2} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin^{\frac{2}{3}} t \right) = \frac{3}{2} \in R.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится по определению.

ПРИМЕР 3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int\limits_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_A^B = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A) =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \operatorname{arctg} B - \lim_{A \to -\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ▪

Пример 4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \in C\big([1; +\infty)\big)$, следовательно, $x = +\infty$ единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_1^t \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\| \begin{matrix} \sqrt{x} = z & dx = 2z dz & x = t \to z = \sqrt{t} \\ x = z^2 & x = 1 \to z = 1 & \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2 \int\limits_1^{\sqrt{t}} \frac{z\, dz}{(z^2+1) \cdot z} = 2 \lim_{t \to +\infty} \left(arctg \sqrt{t} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_0^{\infty} x \sin x dx = \lim_{A \to \infty} \int\limits_0^A x \sin x dx = \lim_{A \to \infty} (-x \cos x |_0^A + \int\limits_0^A \cos x dx) = \lim_{A \to \infty} (-A \cos A + \sin A).$$

Однако последний предел не существует. Следовательно $\int\limits_0^{\infty} x \sin x dx$ расходится.

Пример 6. Выяснить, при каких α интеграл $J_\alpha = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится, а при каких расходится.

Решение. Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$J_1 = \int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} \right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \varepsilon - \ln|b-a| \right] = \infty.$$ J_1 расходится.

Если $\alpha \neq 1$, тогда

$$J_2 = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{1-\alpha} \left[\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right] = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ при } \alpha < 1, \\ \infty, \text{ при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл J_α сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.