Тема 7

Четырехмерные векторы в псевдоевклидовом пространстве, компоненты 4-радиус-вектора, квадрат его длины, инвариантность при преобразованиях Лоренца. 4-векторы контра - и ковариантного типа, их преобразование при переходе от одной системы координат к другой. Квадрат длины 4-вектора в представлении контра- и ковариантной записи компонент. Скалярное произведение четырехмерных векторов в контра- и ковариантной форме. Четырехмерный скаляр. Временная и пространственная компоненты 4–вектора, отрицательные, положительные и нулевые значения квадрата четырехмерного вектора – времени подобные, пространственно подобные, нулевые величины четырехмерного вектора.

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^{μ}, где индекс μ пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct\,,\ x^1 = x\,,\ x^2 = y\,,\ x^3 = z\,.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырехмерным вектором* (4-вектором) A^{μ} называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^{μ}[3]). При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + \dfrac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,,\ A^1 = \frac{A'^1 + \dfrac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,,\ A^2 = A'^2\,,\ A^3 = A'^3\,. \tag{38.1}$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$\left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^{μ} и A_{μ} с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0\,,\ A_1 = -A^1\,,\ A_2 = -A^2\,,\ A_3 = -A^3\,. \tag{38.2}$$

Величины A^{μ} называют *контравариантными*, а A_{μ} – *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

---

[3] В этой книге мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, греческими буквами λ, μ, ν, ...

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} A_{\mu} = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 .$$

Такие суммы принято записывать просто как $A^{\mu} A_{\mu}$, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

Тема 8

Скалярное произведение четырехмерных векторов в контра- и ковариантной форме. Четырехмерный скаляр. Временная и пространственная компоненты 4 – вектора, отрицательные, положительные и нулевые значения квадрата четырехмерного вектора – времени подобные, пространственно подобные, нулевые величины четырехмерного вектора.

4 тензоры 2-го ранга как произведение компонент 4 векторов. Контра-, ковариантное, смешанное представление 4-тензора. Симметричные, антисимметричные, единичные тензоры, свертывание тензора, образование скалярного произведения двух 4 векторов, понижение ранга. Тензоры высших рангов. Дифференциальные и интегральные операции 4-векторного анализа

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^{\mu} B_{\mu} = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 .$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^{\mu} B_{\mu}$, так и в виде $A_{\mu} B^{\mu}$ – результат от этого не меняется. Вообще, во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхние и нижние индексы[4]).

Произведение $A^{\mu} B_{\mu}$ является 4-скаляром – оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно, но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^{\mu} A_{\mu}$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону.

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 – пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно о *времениподобных*,

[4] В современной литературе часто опускают вообще индексы у четырехмерных векторов, а их квадраты и скалярные произведения записывают просто как A^2 AB. В этой книге, однако, мы не будем пользоваться таким способом обозначений.

пространственноподобных и *нулевых* 4-векторах (снова по аналогии с терминологией для интервалов).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^{μ} составляют трехмерный вектор *A*. Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы часто будем записывать их как

$$A^{\mu} = \left(A^0, \vec{A}\right).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора: $A_{\mu} = \left(A^0, -\vec{A}\right)$, а квадрат 4-вектора: $A^{\mu}A_{\mu} = \left(A^0\right)^2 - \vec{A}^2$. Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^{\mu} = \left(ct, \vec{r}\right),\ x_{\mu} = \left(ct, -\vec{r}\right),\ x^{\mu}x_{\mu} = \left(c^2t^2, \vec{r}^{\,2}\right).$$

У трехмерных векторов (в координатах *x*, *y*, *z*) нет, конечно, необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Везде (где это не сможет привести к недоразумениям) мы будем писать их компоненты A_i ($i = x, y, z$) с индексами внизу, обозначая эти индексы латинскими буквами. В частности, по дважды повторяющимся латинским индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям *x*, *y*, *z* (например, $\overrightarrow{AB} = A_iB_i$).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность 16 величин $A^{\mu\nu}$, которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-теизоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные $A^{\mu\nu}$, ковариантные $A_{\mu\nu}$ и смешанные A^{μ}_{ν}, (в последнем случае надо, вообще говоря, различать $A^{\mu}_{\ \nu}$ и $A_{\mu}^{\ \nu}$, т. е. следить за тем, какой именно – первый или второй – индекс стоит вверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты. Так:

$$A_{00} = A^{00},\ A_{01} = -A^{01},\ A_{11} = A^{11},\ \ldots,$$
$$A_0^{\ 0} = A^{00},\ A_0^{\ 1} = A^{01},\ A^0_{\ 1} = -A^{01},\ A_1^{\ 1} = -A^{11},\ \ldots$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент A^{11}, A^{12}, … составляют трехмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трехмерные векторы, а компонента A^{00} является трехмерным скаляром.

Тензор $A^{\mu\nu}$ называется симметричным, если $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, и антисимметричным, если $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (т. е. компоненты A^{00}, A^{11}, …) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00} = -A^{00}$. У симметричного тензора $A^{\mu\nu}$ смешанные компоненты $A^{\mu}{}_{\nu}$ и $A_{\nu}{}^{\mu}$, очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто A^{μ}_{ν}, располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора $A^{\mu\nu}$ можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^{\mu}{}_{\mu} = A^{0}{}_{0} + A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} + A^{3}{}_{3}$$

(при этом, конечно, $A^{\mu}{}_{\mu} = A_{\mu}{}^{\mu}$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра $A^{\mu}B_{\mu}$ из тензора $A^{\mu}B_{\nu}$. Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, $A^{\mu}{}_{\nu\lambda\mu}$ есть тензор 2-го ранга, $A^{\mu}{}_{\nu}B^{\nu}$ – 4-вектор, $A^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$ – скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором называется тензор δ^{μ}_{ν}, для которого имеет место равенство

$$\delta^{\nu}_{\mu}A^{\mu} = A^{\nu} \tag{38.3}$$

при любом 4-векторе A^{μ}. Очевидно, что компоненты этого тензора равны

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu = \nu, \\ 0, \text{ если } \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{38.4}$$

Его след: $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$.

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных я интегральных операциях четырехмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра φ есть 4-вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right).$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu}$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще, операторы дифференцирования по координатам x^μ, $\partial/\partial x^\mu$, должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора – выражение $\partial A^\mu/\partial x^\mu$, в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^μ.

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирований: 1) по кривой в 4-пространстве, 2) по поверхности (двухмерной), 3) по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию, 4) по четырехмерному объему.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трехмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы. Из них нам понадобится лишь теорема о преобразовании интеграла по 4-объему в интеграл по гиперповерхности.

Элемент интегрирования по 4-объему

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dV \tag{38.5}$$

является скаляром; это очевидно из сопоставления законов преобразования интервалов времени (35.1) и пространственных объемов (36.5). Элемент же интегрирования по гиперповерхности dS^μ – 4-вектор, по величине равный «площади» элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (так, составляющая $dS^0 = dx\,dy\,dz$, т. е. представляет собой элемент трехмерного объема dV – проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = \mathrm{const}$).

Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_μ на оператор

$$dS_\mu \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{38.6}$$

Например, для интеграла от вектора A^μ имеем:

$$\oint A^\mu dS_\mu = \int \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega. \tag{38.7}$$

Эта формула является обобщением теоремы Гаусса.

Тема 9

Энергия и импульс. Принцип наименьшего действия и интеграл действия свободной частицы вдоль мировой линии между двумя событиями. Релятивистская функция Лагранжа и ее переход к классическому выражению

Как и в классической механике, для вывода релятивистских уравнений движения частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Начнем с нахождения интеграла действия для свободной частицы.

Этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. При этом под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Единственный такой скаляр, который можно построить для свободной частицы, есть элемент интервала ds, или $\mathrm{const}\cdot ds$, где const – характерная для частицы постоянная. Обозначим эту посеянную через – mc; смысл такого обозначения выяснится ниже. Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид:

$$S = -mc\int_a^b ds\,, \tag{39.1}$$

где $\int_a^b$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями – нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени t_1 и t_2.

С помощью (35.1) это выражение можно переписать в виде интеграла по времени

$$S = -mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt\,.$$

Сравнив его с общим определением (2.1)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt\,,$$

мы видим, что релятивистская функция Лагранжа свободной частицы

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,. \tag{39.2}$$

При малых скоростях, в нерелятивистском пределе, можно разложить L по степеням υ/c. Опустив члены высших порядков, получим:

$$L = -mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Постоянный член в функции Лагранжа не отражается на уравнениях движения и может быть опущен. После этого мы вернемся к классическому выражению $L = m\upsilon^2/2$. В то же время выясняется смысл введенной в (39.1) постоянной m, которая совпадает с массой частицы.

Обобщенные координаты и обобщенные силы. Параметры, которые определяют положение механической системы в пространстве, называются *обобщенными координатами* и обозначаются $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_s$, где индекс k пробегает значения от 1 до s - число степеней свободы.

Декартовые координаты частиц могут быть выражены через обобщенные координаты:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, \ldots, q_s, t) \quad a = 1, 2, \ldots N\,. \tag{9.1}$$

Пример 9.1. Сферический маятник длины l. Декартовые координаты выражаются через сферические координаты ϕ, θ (которые могут выступать в качестве обобщенных координат) следующим образом:

$$x = l \sin\theta \cos\phi, \quad y = l \sin\theta \sin\phi, \quad z = l \cos\theta\,,$$

Уравнение связи имеет вид:

– в декартовых координатах - $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$,

– в сферических координатах - $r = l$. Данная система имеет две степени свободы движения.

Виртуальные перемещения определяются следующими соотношениями:

$$\delta \vec{r}_a = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \delta q_k\,. \tag{9.2}$$

Выразим виртуальную работу активных сил через обобщенные координаты частиц:

$$\delta A = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \delta \vec{r}_a = \sum_{k=1}^{s} \left[\sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \sum_{k=1}^{s} Q_k\, \delta q_k\,. \tag{9.3}$$

Здесь

$$Q_k = \sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} - \tag{9.4}$$

обобщенные силы.

Уравнения Лагранжа 2-го рода. Получим уравнения Лагранжа 2-го рода из принципа Даламбера – Лагранжа (8.13). Для этого подставим в (8.13) выражения (9.2) и изменим, порядок суммирования по индексам a, k. В результате получим:

$$\sum_{k=1}^{s} \left[\sum_{a=1}^{N} \vec{F}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{v}}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0\,. \tag{9.5}$$

Введем обозначения:

$$A_k = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{v}}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\,. \tag{9.6}$$

С учетом определения (9.4) и обозначений (9.6) формулу (9.5) перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^{s} \left(Q_k - A_k \right) \delta q_k = 0\,. \tag{9.7}$$

Для выполнения равенства (9.7), в силу независимости вариаций обобщенных координат, должно быть

$$Q_k = A_k \,. \tag{9.8}$$

Преобразуем равенство (9.6), используя тождества

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_k}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_k}$$

и равенство

$$m_a \dot{\vec{v}}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_a \vec{v}_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_k}\right) - m_a \vec{v}_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m_a v_a^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_a v_a^2}{2}\right).$$

В результате преобразований получаем:

$$A_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\,. \tag{9.9}$$

Здесь

$$T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2} \; - \tag{9.10}$$

кинетическая энергия системы частиц. Подставив формулу (9.9) в уравнение (9.8), получим искомые уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (k = 1, \ldots s)\,. \tag{9.11}$$

Рассмотрим случай потенциальных сил: $\vec{F}_a = -dU/d\vec{r}_a$. В этом случае для обобщенных сил (9.4) получаем:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{9.12}$$

и $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$. Подставив (9.12) в уравнения Лагранжа (9.11), получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, \ldots, s)\,. \tag{9.13}$$

Здесь функция

$$L = T(q_k, \dot{q}_k, t) - U(q, t) \tag{9.14}$$

представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии системы частиц и выражается через обобщенные координаты, скорости частиц системы и время. Функция (9.14) называется *функцией Лагранжа*.

Функция Лагранжа задается неоднозначно. В частности, из уравнений (9.13) следует, что прибавление к ней любой величины, которая не зависит явно от обобщенных координат и скоростей частиц, не меняет уравнений (9.13). Следует заметить, что вид уравнений Лагранжа не зависти от выбора системы отсчета и системы координат, т.е. данные уравнения инвариантны по отношению к выбору системы отсчета и системы координат.

Пример 2.

1) *Частица в поле силы тяжести Земли*

Для данной частицы кинетическая энергия $T = m\frac{v^2}{2}$, потенциальная энергия равна mgh. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = T = m\frac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{2} - mgz.$$

В качестве обобщенных координат здесь выбраны декартовые координаты. Подставляя функцию Лагранжа в уравнения (9.13), найдем:

$$\frac{d}{dt}mv_x = 0, \quad \frac{d}{dt}mv_y = 0, \quad \frac{d}{dt}mv_z = -mg.$$

Это есть уравнения движения частицы в поле силы тяжести. Интегрируя данные уравнения, находим закон движения частицы.

2) *Пружинный маятник*. Для частицы массы m, совершающей колебания напружине жесткостью k, функция Лагранжа имеет вид

$$L = m\frac{v_x^2}{2} - k\frac{x^2}{2},$$

где x – смещение частицы из положения равновесия. Подставив данную функцию в (9.13), получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d}{dt}mv_x + kx = 0.$$

Кинетическая энергия, ее выражение через обобщенные координаты и скорости. Рассмотрим механическую систему, на которую накладываются нестационарные связи. В этом случае скорости отдельных частиц системы представляются через обобщенные скорости по формулам

$$\vec{v}_a = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}. \tag{9.15}$$

Подставим данные формулы в (9.10). В результате получим:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}\right)\left(\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}\right).$$

Изменим порядок суммирования в последней формуле. Окончательно получим:

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} \tag{9.16}$$

где

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} f_{kl}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_l, \quad f_{kl} = f_{lk} = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_l}, \tag{9.17}$$

$$T^{(1)} = \sum_{k=1}^{s} f_k\,\dot{q}_k, \quad f_k = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}, \tag{9.18}$$

$$T^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}\right)^2 . \qquad (9.19)$$

Здесь функции f и $T^{(0)}$ явно зависят от обобщенных координат частиц и времени.

В результате можно сделать следующие выводы: 1) кинетическая энергия системы частиц является неоднородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей; 2) кинетическая энергия и функция Лагранжа явно зависят от времени.

В том случае, когда на систему накладываются стационарные связи, для кинетической энергии можно записать:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} f_{kl}(q_1,\ldots,q_s)\dot{q}_k \dot{q}_l , \qquad (9.20)$$

и функция Лагранжа, в случае активных потенциальных сил имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} f_{kl}(q_1,\ldots,q_s)\dot{q}_k \dot{q}_l - U(q_1,\ldots q_s,t) . \qquad (9.21)$$

Коэффициенты f_{kl} носят название коэффициентов инерции. В качестве их могут выступать, например, массы и моменты инерции частиц системы.

Пример 9.3. Рассмотрим систему из двух частиц. В качестве обобщенных координат выберем радиус-вектор центра инерции системы $\vec{R}_c$ и вектор $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Кинетическая энергия данной системы имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}_c^{\,2} + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} ,$$

где m – масса системы, μ – приведенная масса системы.

Принцип наименьшего действия. Пусть положение механической системы в пространстве задается с помощью обобщенных координат - q_k. <u>Конфигурационным пространством</u> механической системы называется s - мерное пространство, точками которого являются: $(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_s)$. Состоянию системы в момент времени t отвечает точка в конфигурационном пространстве. Переход системы из состояния A в состояние B можно рассматривать, как движение изображающей точки в конфигурационном пространстве.

Введем <u>функцию действия</u> S по следующему определению:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt . \qquad (9.22)$$

Функция действия имеет размерность [энергия×время], которая совпадает с размерностью момента импульса.

Принцип экстремального действия (принцип Гамильтона) утверждает, что при переходе системы из состояния A (в момент времени t_1) в состояние B (в момент времени t_2) реально осуществляется такой путь изображающей точки в конфигурационном пространстве, при котором функция действия имеет экстремальное значение (как правило, минимальное). Другими словами, вариация функции действия обращается в нуль:

$$\delta S = 0 . \tag{9.23}$$

Данный принцип справедлив в случае механической системы с голономными, идеальными связями и активными потенциальными силами. (Заметим, что данный принцип справедлив и в случае обобщенно-потенциальных сил, которые представляются в виде: $Q_k = -\dfrac{\partial V}{\partial q_k} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}$, где $V = V(q_k, \dot{q}_k, t)$ - обобщенный потенциал).

Доказательство. На самом деле:

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \right) dt .$$

Здесь использовано определение вариации функции. Интегрируем по частям данное выражение

$$\delta S = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k\,dt = 0 .$$

Здесь используем, что $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0, \delta \dot{q}_k = \dfrac{d}{dt}(\delta q_k)$ и уравнения Лагранжа (9.13).

Справедливо и обратное утверждение: из принципа экстремального действия (9.23) следуют уравнения Лагранжа.

Тема 10

Импульс, смысл релятивистской массы. Сила, действующая на тело при изменении скорости по направлению, по величине. Энергия частицы, энергия и масса покоя. Связь между энергией и импульсом. Закон преобразования сил. Границы применимости механики Ньютона. Релятивистский трехмерный импульс и энергия, связь между ними. Кинетическая энергия и энергия покоя

Импульс частицы определяется как производная $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{\upsilon}$. Продифференцировав выражение (39.2), получим:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} . \tag{39.3}$$

При малых скоростях ($\upsilon \ll c$) это выражение переходит в классическое $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно к скорости. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{39.4}$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{39.5}$$

Мы видим, что в обоих случаях отношение силы к ускорению различно.

Согласно общему определению (6.1) энергия частицы

$$E = \vec{p}\vec{\upsilon} - L. \tag{39.6}$$

Подставив сюда L и $\vec{p}$ из (39.2) и (39.3), получим:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{39.7}$$

Эта очень важная формула показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $\upsilon = 0$, а остается конечной величиной, равной

$$E = mc^2. \tag{39.8}$$

Ее называют *энергией покоя* частицы.

При малых скоростях ($\upsilon \ll c$) имеем, разлагая (39.7) по степеням υ/c:

$$E \approx mc^2 + \frac{mc^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Подчеркнем, что хотя мы говорим здесь о «частице», но ее «элементарность» нигде не используется. Поэтому полученные формулы в равной степени применимы и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц, причем под m надо понимать полную массу тела, а под υ – скорость его движения как целого. В частности, формула (39.8) справедлива и для любого покоящегося как целое тела. Обратим внимание на то, что энергия свободного тела (т. е. энергия любой замкнутой системы) оказывается в релятивистской механике вполне определенной, всегда положительной величиной, непосредственно связанной с массой тела. Напомним в этой связи, что в классической механике энергия тела определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и может быть как положительной, так и отрицательной.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергии покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, mc^2 не равно сумме

$\sum m_a c^2$ (m_a – массы частиц), а потому и m не равно $\sum m_a$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы: масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя выражения (39.3) и (39.7) в квадрат и сравнивая их, найдем следующее соотношение между энергией и импульсом частицы:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{39.9}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона H:

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{39.10}$$

При малых скоростях $p \ll mc$ и приближенно

$$H \approx m^2c^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е. за вычетом энергии покоя – классическое выражение функции Гамильгона.

Из выражений (39.3) и (39.7) вытекает также следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы

$$\vec{p} = \frac{E\vec{\upsilon}}{c^2}. \tag{39.11}$$

При $\upsilon = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света[5]). Из (39.11) имеем для таких частиц:

$$p = \frac{E}{c}. \tag{39.12}$$

Приближенно такая же формула справедлива и для частиц с отличной от нуля массой в так называемом *ультрарелятивистском* случае, когда энергия частицы E велика по сравнению с ее энергией покоя.

Произведенные в предыдущем параграфе выводы сами по себе еще оставляют открытым вопрос о законе преобразования энергии и импульса частицы при переходе от одной системы отсчета к другой. Для ответа на этот вопрос необходимо выяснить четырехмерную природу этих величин.

Из обычного трехмерного вектора скорости частицы $\vec{\upsilon}$ можно образовать и 4-вектор. Такой *четырехмерной скоростью* (4-скоростью) является

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}. \tag{40.1}$$

Выразив элемент интервала ds через дифференциал времени dt согласно (35.1), можно написать:

---

[5] Таковы световые кванты – фотоны, а также нейтрино.

$$u^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dx^{\mu}}{cds}.$$

Отсюда видно, что компоненты этого 4-вектора

$$u^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right). \tag{40.2}$$

Компоненты 4-скорости не независимы. Заметив, что $dx_{\mu}dx^{\mu} = ds^2$, находим:

$$u_{\mu}u^{\mu} = 1. \tag{40.3}$$

С геометрической точки зрения u^{μ} есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

Тема 11

***Релятивистская динамика.** 4-импульс, преобразование энергии и импульса при переходе от одной системы отсчета к другой. 4-вектор скорости как единичный вектор касательной к мировой линии. 4-импульс с компонентами энергии и трехмерного импульса, квадрат 4-импульса*

Четырехмерным импульсом (4-импульсом) частицы называется 4-вектор

$$p^{\mu} = mcu^{\mu}. \tag{40.4}$$

Взяв компоненты 4-скорости из (40.2) и сравнив с выражениями (39.3) и (39.7), мы увидим, что компоненты 4-импульса

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \tag{40.5}$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Отсюда сразу следуют формулы преобразования этих величин. Подставив в общие формулы преобразования 4-вектора (38.1) выражения (40.5), находим:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ p_y = p'_y,\ p_z = p'_z,\ E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{40.6}$$

где p_x, p_y, p_z – компоненты трехмерного импульса p.

Из определения 4-импульса (40.4) и тождества (40.3) имеем для квадрата 4-импульса свободной частицы:

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2. \tag{40.7}$$

Подставив сюда компоненты p^{μ} из (40.5), мы вернемся к соотношению (39.9).

Тема 12

Импульс в псевдоевклидовом пространстве и его вид в различных инерциальных системах отсчета, Четырехмерный вектор скорости как единичный вектор касательной к мировой линии. Распад частиц. Самопроизвольный распад тела на две части и условия реализации процесса. Энергия связи. Образование частицы при неупругом столкновении в системе центра инерции.

Взяв компоненты 4-скорости из (40.2) и сравнив с выражениями (39.3) и (39.7), мы увидим, что компоненты 4-импульса

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{40.5}$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Отсюда сразу следуют формулы преобразования этих величин. Подставив в общие формулы преобразования 4-вектора (38.1) выражения (40.5), находим:

$$p_x = \frac{p'_x + \dfrac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\ p_y = p'_y,\ p_z = p'_z,\ E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{40.6}$$

где p_x, p_y, p_z – компоненты трехмерного импульса p.

Из определения 4-импульса (40.4) и тождества (40.3) имеем для квадрата 4-импульса свободной частицы:

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2. \tag{40.7}$$

Подставив сюда компоненты p^{μ} из (40.5), мы вернемся к соотношению (39.9).

Распад частиц

Рассмотрим самопроизвольный распад тела с массой M на две части с массами m_1 и m_2. Закон сохранения энергии при распаде, примененный в системе отсчета, в которой тело покоится, дает[6]):

$$M = E_{10} + E_{20},$$

где E_{10} и E_{20} – энергии разлетающихся частей. Поскольку $E_{10} > m_1$ и $E_{20} > m_2$, то равенство (41.1) может выполняться лишь, если $M > m_1 + m_2$, т. е. тело может самопроизвольно распадаться на части, сумма масс которых меньше массы тела. Напротив, если $M < m_1 + m_2$, то тело устойчиво (по отношению к данному распаду) и самопроизвольно не распадается. Для осуществления распада надо

---

[6] В §§ 41, 42 полагаем $c = 1$. Другими словами, скорость света выбирается в качестве единицы измерения скоростей (при этом размерности длины и времени становятся одинаковыми). Такой выбор является естественным в релятивистской механике и очень упрощает запись формул. Однако в этой книге (значительное место в которой уделено и нерелятивистской теории) мы, как правило, не будем пользоваться такой системой единиц, а при ее использовании будем каждый раз оговаривать это.

Если в формуле положено $c = 1$, то возвращение к обычным единицам не представляет труда: скорость света вводится в нее таким образом, чтобы обеспечить правильную размерность.

было бы в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его *энергии связи* $(m_1 + m_2 - M)$.

Наряду с законом сохранения энергии при распаде должен выполняться закон сохранения импульса, т. е. сумма импульсов разлетающихся частей, как и первоначальный импульс тела, равна нулю: $p_{10} + p_{20} = 0$. Отсюда $p_{10}^2 = p_{20}^2$ или

$$E_{10}^2 - m_1^2 = E_{20}^2 - m_2^2. \tag{41.2}$$

Два уравнения (41.1) и (41.2) однозначно определяют энергии разлетающихся частей:

$$E_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M},\ E_{20} = \frac{M^2 + m_1^2 + m_2^2}{2M}. \tag{41.3}$$

В некотором смысле обратным является вопрос о вычислении суммарной энергии *M* двух сталкивающихся частиц в системе отсчета, в которой их суммарный импульс равен нулю *(система центра инерции)*. Вычисление этой величины дает критерий, определяющий возможность осуществления различных процессов неупругих столкновений, сопровождающихся изменением состояния сталкивающихся частиц или «рождением» новых частиц. Каждый такой процесс может происходить лишь при условии, что сумма масс всех «продуктов реакции» не превышает *M*.

Пусть в исходной *(лабораторной)* системе отсчета частица с массой m_1 и энергией E_1 сталкивается с покоящейся частицей с массой m_2. Суммарная энергия обеих частиц

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2,$$

а суммарный импульс $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1$. Рассматривая обе частицы вместе как одну сложную систему, мы найдем скорость ее движения как целого согласно (39.11):

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{p}_1}{E_1 + m_2}. \tag{41.4}$$

Это и есть скорость движения системы центра инерции относительно лабораторной системы.

Однако для определения искомой массы *M* нет необходимости фактически производить преобразование от одной системы отсчета к другой. Вместо этого можно воспользоваться формулой (39.9), применимой к составной системе в такой же мере, как и к каждой частице в отдельности. Таким образом, имеем:

$$M^2 = E^2 - p^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2),$$

откуда

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1. \tag{41,5}$$

Задача. Определить наибольшую энергию, которую может унести одна из распадных частиц при распаде неподвижной частицы с массой *M* на три частицы m_1, m_2, m_3.

Решение. Частица m_1 имеет наибольшую энергию, если система двух остальных частиц m_2 и m_3 имеет наименьшую возможную массу; последняя равна сумме m_2+m_3 (чему отвечает совместное движение этих частиц с одинаковой скоростью). Сведя, таким образом, вопрос к распаду тела на две части, получим согласно (41.3):.

$$E_{1\max}=\frac{M^2+m_1^2-\left(m_2+m_3\right)^2}{2M}$$

Тема 13

Масса системы частиц. Законы сохранения энергии и импульса в реакциях распада и рассеяния частиц. Энергия ядерной реакции. Эндотермическая ядерная реакция.

Упругие столкновения частиц в представлении лабораторной системе отсчета, системы центра инерции при больших и малых энергиях налетающей частицы. Уровни переданной энергии от налетающей релятивистской частицы к бомбардируемой частице.

Упругие столкновения частиц. Рассмотрим, с точки зрения релятивистской механики, упругое столкновение частиц. Обозначим импульсы и энергии двух сталкивающихся частиц (с массами m_1 и m_2) через p_1, E_1 и p_2 и E_2; значения величин после столкновения будем отмечать штрихом.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении можно записать вместе в виде уравнения сохранения 4-импульса:

$$p_1^\mu+p_2^\mu=p_1'^\mu+p_2'^\mu. \tag{42.1}$$

Составим из этого 4-векторного уравнения инвариантные соотношения, которые будут удобными для дальнейших вычислений. Для этого перепишем (42.1) в виде:

$$p_1^\mu+p_2^\mu-p_1'^\mu=p_2'^\mu$$

и возведем обе стороны равенства в квадрат (т. е. напишем их скалярные произведения самих на себя). Замечая, что квадраты 4-импульсов p_1^μ и $p_1'^\mu$ равны, а квадраты p_2^μ и $p_2'^\mu$ равны m_2^2, получим:

$$m_1^2+p_{1\mu}p_2^\mu-p_{1\mu}p_1'^\mu-p_{2\mu}p_1'^\mu=0. \tag{42.2}$$

Аналогичным образом, возведя в квадрат равенство $p_1^\mu+p_2^\mu-p_2'^\mu=p_1'^\mu$ получим:

$$m_2^2+p_{1\mu}p_2^\mu-p_{2\mu}p_2'^\mu-p_{1\mu}p_2'^\mu=0. \tag{42.3}$$

Рассмотрим столкновение в лабораторной системе отсчета, в которой до столкновения одна из частиц (частица m_2) покоилась. Тогда $\vec{p}_2=0$, $E_2=m_2$ и фигурирующие в (42.2) скалярные произведения равны:

$$p_{1\mu}p_2^\mu=E_1m_2,\ p_{2\mu}p_1'^\mu=m_2E_1',$$

$$p_{1\mu}p_1'^\mu=E_1E_1'-\vec{p}_1\vec{p}_1'=E_1E_1'-p_1p_1'\cos\theta_1,$$

где θ_1 – угол рассеяния налетающей частицы m_1. Подставив эти выражения в (42.2), получим:

$$\cos\theta_1 = \frac{E_1'\left(E_1 + m_2\right) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \tag{42.5}$$

Аналогичным образом из (42.3) найдем:

$$\cos\theta_2 = \frac{\left(E_1 + m_2\right)\left(E_2' - m_2\right)}{p_1 p_2'}. \tag{42.6}$$

где θ_2 – угол, образуемый импульсом отдачи $\vec{p}_2'$ с импульсом налетающей частицы p_1. Эти формулы связывают углы рассеяния обеих частиц в лабораторной системе с изменениями их энергии.

Отметим, что если $m_1 > m_2$, т. е. налетающая частица тяжелее покоящейся, то угол рассеяния θ_1, не может превышать некоторого максимального значения. Элементарным вычислением легко найти, 'что это значение определяется равенством

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{42.7}$$

совпадающим с классическим результатом (14.8).

Формулы (42.5–42.6) упрощаются в случае, когда налетающая частица обладает равной нулю массой: $m_1 = 0$ и соответственно $p_1 = E_1$, $p_1' = E_1'$. Выпишем для этого случая формулу для энергии налетающей частицы после столкновения, выраженной через угол ее отклонения:

$$E_1' = \frac{m_2}{1 - \cos\theta_1 + \dfrac{m_2}{E_1}}. \tag{42.8}$$

Вернемся снова к общему случаю столкновения частиц любых масс. Наиболее просто столкновение выглядит в системе центра инерции. Отмечая значения величин в этой системе дополнительным индексом 0, имеем здесь $\vec{p}_{10} = -\vec{p}_{20} \equiv \vec{p}_0$. В силу сохранения импульса, импульсы обеих частиц при столкновении только поворачиваются, оставаясь равными по величине и противоположными по направлению. В силу же сохранения энергии абсолютные значения каждого из импульсов остаются неизменными.

Обозначим через χ угол рассеяния в системе центра инерции – угол, на который поворачиваются при столкновении импульсы $\vec{p}_{10}$ и $\vec{p}_{20}$. Этой величиной полностью определяется процесс рассеяния в системе центра инерции, а потому и во всякой другой системе отсчета. Ее удобно выбрать также и при описании столкновения в лабораторной системе в качестве того единственного параметра, который остается неопределенным после учета законов сохранения энергии и импульса.

Выразим через этот параметр конечные энергии обеих частиц в лабораторной системе. Для этого вернемся к соотношению (42.2), но на этот раз раскроем произведение $p_{1\mu}p_1'^{\mu}$ в системе центра инерции:

$$p_{1\mu}p_1'^{\mu} = E_{10}E_{10}' - \vec{p}_{10}\vec{p}_{10}' = E_{10}^2 - p_0^2\cos\chi = p_0^2\left(1-\cos\chi\right) + m_1^2$$

(в системе центра инерции энергия каждой из частиц при столкновении не меняется: $E_{10}' = E_{10}$). Остальные же два произведения раскрываем по-прежнему в лабораторной системе, т. е. берем из (42.4). В результате получим:

$$E_1 - E_1' = \frac{p_0^2}{m_2}\left(1-\cos\chi\right).$$

Остается выразить p_0^2 через величины, относящиеся к лабораторной системе. Это легко сделать путем приравнивания значений инварианта $p_{1\mu}p_2^{\mu}$ в обеих системах:

$$E_{10}E_{20} - \vec{p}_{10}\vec{p}_{20} = E_1 m_2$$

или

$$\sqrt{\left(p_0^2 + m_1^2\right)\left(p_0^2 + m_2^2\right)} = E_1 m_2 - p_0^2.$$

Решая это уравнение относительно p_0^2, получим:

$$p_0^2 = \frac{m_2^2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}. \tag{42.9}$$

Имея также в виду закон сохранения $E_1 + m_2 = E_1' + E_2'$, окончательно пишем:

$$E_1 - E_1' = E_2' - m_2 = \frac{m_2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}\left(1-\cos\chi\right). \tag{42.10}$$

Это выражение представляет собой энергию, теряемую первой и соответственно приобретаемую второй частицей. Наибольшая передача энергии получается при $\chi = \pi$ и равна

$$E_{2\max}' - m_2 = E_1 - E_{1\min}' = \frac{2m_2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}. \tag{42.11}$$

Отношение минимальной кинетической энергии налетающей частицы после столкновения к ее первоначальной кинетической энергии:

$$\frac{E_{1\min}' - m_1}{E_1 - m_1} = \frac{\left(m_1 - m_2\right)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}. \tag{42.12}$$

В предельном случае малых скоростей (когда $E \approx m + m\upsilon^2/2$) это отношение стремится к постоянному пределу, равному

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

В обратном же пределе больших энергий E_1 отношение (42.12) стремится к нулю; к постоянному же пределу стремится сама величина $E'_{1\min}$. Этот предел равен

$$E'_{1\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Предположим, что $m_2 \ll m_1$, т. е. масса налетающей частицы мала по сравнению с массой покоившейся частицы. Согласно классической механике при этом легкая частица могла бы передать тяжелой только ничтожную часть своей энергии (см. § 14). Такое положение не имеет, однако, места в релятивистской теории. Из формулы (42.12) видно, что при достаточно больших энергиях E_1 доля переданной энергии может достичь порядка 1. Для этого, однако, недостаточно, чтобы скорость частицы m_1 была порядка 1, а необходимы, как легко видеть, энергии

$$E_1 \sim m_2,$$

т. е. легкая частица должна обладать энергией порядка энергии покоя тяжелой частицы.

Аналогичное положение имеет место при $m_2 \gg m_1$, т. е. когда тяжелая частица налетает на легкую. И здесь согласно классической механике, происходила бы лишь незначительная передача энергии. Доля передаваемой энергии начинает становиться значительной, только начиная от энергий

$$E_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}$$

Отметим, что и здесь речь идет не просто о скоростях порядка скорости света, а об энергиях, больших по сравнению с m_1, т. е. об ультрарелятивистском случае.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Примеры решения задач

Задача 1.

1. Для двух частиц одинаковой массы определить угол их разлета после столкновения в лабораторной системе отсчета.

Решение. Возведя в квадрат обе стороны равенства (42.1), получим:

$$p_{1\mu} p_2^{\mu} = p'_{1\mu} p_2'^{\mu},$$

а после раскрытия произведений 4-импульсов в лабораторной системе:

$$E_1 m_2 = E'_1 E'_2 - p'_1 p'_2 \cos\theta,$$

где θ – угол разлета (угол между p'_1 и p'_2). Для частиц одинаковой массы ($m_1 = m_2 \equiv m$), подставив

$$p'_1 = \sqrt{E_1'^2 - m^2}\,,\ p'_2 = \sqrt{E_2'^2 - m^2}$$

и учитывая сохранение энергии ($E_1 + m = E'_1 + E'_2$), получим отсюда