Закон больших чисел

часто берут $z = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$ ср. арифм

например ср. кин энергия на одну частицу

средний импульс на молекулу

Т.к. x_k - случ. величина $\longmapsto$ z также случ вел

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \bar{x}_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k P_k$$

$$W(|z-\bar{z}| > \varepsilon) \leq \frac{\overline{(z-\bar{z})^2}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{N^2}\overline{\sum (x_i-\bar{x}_i)\cdot(x_k-\bar{x}_k)}$$

$$W(|z-\bar{z}|>\varepsilon) \leq \frac{1}{N^2\varepsilon^2}\overline{\sum_{i,k}(x_i-\bar{x}_k)(x_k-\bar{x}_k)}$$

$$\frac{1}{N^2\varepsilon^2}\left(\sum_{i=k}\overline{(x_i-\bar{x}_i)^2} + \underbrace{\sum_{i\neq k}\overline{(x_i-\bar{x}_i)(x_k-\bar{x}_k)}}_{0}\right)$$

$$W(|z-\bar{z}|>\varepsilon) \leq \frac{1}{N\varepsilon^2}\overline{(x_i-\bar{x}_i)^2} = \frac{D(x_i)}{N\varepsilon^2}$$

вер-сть превышения ε для ср. арифм z от его статист. зн. $\bar{z}$ становится малой $\forall$ малых ε если $N \to \infty$

Средние от функций случайных величин

$F(x_1, x_2, x_3 \dots x_N)$ – ф-я сл. вел x_1, x_2

$\omega(x_1, x_2, x_3 \dots x_N)$ – пл. вер. для совмещ. соб

ст. ср. мат. ожид. $\overline{F} = \underset{(x_1 \dots x_N)}{\iint \dots \int} F(x_1 \dots x_N)\,\omega(x_1 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N$

$$\overline{F} = \int_{(F)} F\,W(F)\,dF$$

$$W(F) = \int_{x_1} \dots \int_{x_N} \delta(F - F(x_1 \dots x_N))\,\omega(x_1, x_2 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N$$

$$\overline{F} = \int_{(F)} F \int_{x_1} \dots \int_{x_N} \delta(F - F(x_1 \dots x_N))\,\omega(x_1 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N\,dF =$$

$$= \int_F F\,\delta(F - F(x_1 \dots x_N))\,dF \int_{x_1 \dots x_N}\int \omega(x_1 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N =$$

$$= \int_{x_1 \dots x_N}\int F(x_1 \dots x_N)\,\omega(x_1 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N$$

$F(x_1, x_2 \dots x_N) = x_1$. $\quad \overline{x}_1 = \int_{x_1}\int_{x_N} x_1\,\omega(x_1, x_2 \dots x_N)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_N$

$$\overline{F} = \int F\,W(F)\,dF$$

$$\overline{F} = \overline{x}_1 = \int_{x_1} x_1 \underbrace{\int_{x_2 \dots x_N}\int \omega(x_1, x_2 \dots x_N)\,dx_2 \dots dx_N}_{W(x_1)}$$

$$\overline{x}_1 = \int x_1\,W(x_1)\,dx_1$$

Статистический метод в распределении Максвелла-Больцмана

Идеальн. одноат. газ во внеш. поле в сост. т-д р-в с термост. T

N матер. точек, m, $U(x, y, z)$ поле

"1" – $x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}$

"2" – $x_2, y_2, z_2, v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}$

"N" – x_N, y_N ...

$6N$ микросостояние системы

1) $\omega(x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, x_2, y_2 \dots v_{zN}, t)$

$x_1, y_1, z_1, v_{x1}, \dots \dots v_{zN}, t$

2) в т-д р-в $\omega \neq f(t)$, $\omega = f(E, a)$

$$E = \sum_{k=1}^{N} E_k : E_k = \frac{m}{2}(v_{x_k}^2 + v_{y_k}^2 + v_{z_k}^2) + U(x_k, y_k, z_k)$$

все внутр пар-ры $= f$(внешн пар, T, E)

$\omega \neq f(t)$ т.к. $\bar{v} \neq f(t)$

3) Молекулы статистически независимы ⇒ умножение вер-й N

$$\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_N = \prod_{k=1}^{N} \omega_k$$

$$\omega_k = \varphi_k(E_k, a)$$

ω_k также $\neq f(t)$

$$F(a,E) = \prod_{k=1}^{N}(\varphi(a,E_k))$$

$$F(a,E) = \prod_{k=1}^{N}\varphi(a,E_k) \quad \Big| \ln$$

$$E = \sum E_k$$

$$\ln F\left(a,\sum_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\varphi(a,E_k) \quad \Big| d$$

$$\frac{F(a,\sum E_k)'_E}{F(a,\sum E_k)}\, d\left(\sum E_k\right) = \sum_k \frac{\varphi_k(a,E_k)'_{E_k}}{\varphi(a,E_k)}\, dE_k$$

$$d(E_1+E_2+\ldots+E_N)$$

$$\frac{\varphi_1(a,E_1)'_{E_1}}{\varphi_1(a,E_1)} = \frac{\varphi_2(a,E_2)'_{E_2}}{\varphi_2(a,E_2)} = \ldots = \frac{\varphi_N(a,E_N)'_{E_N}}{\varphi_N(a,E_N)}$$

$$= -\beta$$

$$\frac{\frac{d\varphi}{dE}}{\varphi} = -\beta \to \varphi_k(a,E) = A e^{-\beta E_k}$$

A - const, A - a, β

$$\beta E_k = [1] \to \beta = \left[\frac{1}{E}\right]$$

$$\varphi_k = A e^{-\frac{E_k}{kT}}$$

$$\varphi_k(x_k,y_k,z_k,v_{x_k},v_{y_k},v_{z_k}) = A e^{-\frac{m}{2kT}(v_{x_k}^2+v_{y_k}^2+v_{z_k}^2)}$$

$$\varphi_k(x_k,y_k,z_k,v_{x_k},v_{y_k},v_{z_k}) = A e^{-\frac{1}{kT}\left\{\frac{m}{2}(v_{x_k}^2+v_{y_k}^2+v_{z_k}^2)+U(x_k,y_k,z_k)\right\}}$$

$$\int\varphi_k(x_k,y_k,z_k,v_{x_k},v_{y_k},v_{z_k})\,dx_k\,dy_k\,dz_k\,dv_{x_k}\,dv_{y_k}\,dv_{z_k} = 1$$

-15-

$$\frac{1}{A} = \iiint e^{-\frac{m}{2kT}(v_{x_k}^2+v_{y_k}^2+v_{z_k}^2)}\,dv_{x_k}\,dv_{y_k}\,dv_{z_k} \iiint e^{-\frac{U(x_k,y_k,z_k)}{kT}}\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{A} = \iiint e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\,dv_x\,dv_y\,dv_z \iiint e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}\,dx\,dy\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi};\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx\,\sqrt{\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2kT}}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2kT}}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2kT}}}\iiint e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}\,dx\,dy\,dz$$

$$A=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\iiint e^{-\frac{U}{kT}}\,dx\,dy\,dz}$$

если $U=0$

$$\iiint dx\,dy\,dz = V$$

$$\varphi_k=\frac{1}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

φ_k – вер-сть $(x_k, y_k, z_k, v_{x_k}, v_{y_k}, v_{z_k})$

$$\bar{n} = \varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_N = N\varphi$$

$x,\ x+\Delta x$
$y,\ y+\Delta y$
$z,\ z+\Delta z$
$v_x,\ v_x+\Delta v_x$
$v_y,\ v_y+\Delta v_y$
$v_z,\ v_z+\Delta v_z$

$$\bar{n}=\frac{1}{A}N e^{-\frac{1}{kT}\left\{\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)+U(x,y,z)\right\}}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta v_x\Delta v_y\Delta v_z$$

ср. число в окрестности

ср. плотность $\dfrac{\bar{n}}{\text{числа част. } \Delta x\Delta y\Delta z\Delta v_x\Delta v_y\Delta v_z} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{kT}\left(\frac{m}{2}v^2+U\right)}\dfrac{1}{\iiint e^{-\frac{U}{kT}}dx}$

$$\nu=\frac{\bar{n}}{\{\Delta x\dots\}\{\Delta v_x\dots\}}=\frac{N}{\iiint e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}\,dx\,dy\,dz}\cdot e^{-\frac{1}{kT}\left\{\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)+U(x,y,z)\right\}}$$