Решить уравнение Бернулли

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}.$$

Обращаю внимание, что это уравнение не является линейным (в правой части уравнения в знаменателе присутствует нелинейная относительно у функция. Но метод решения (Ищем решение уравнения в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x) = u\,v.$ ) применим к неоднородным линейным дифференциальным уравнениям.

Подставим ***y=u v*** в исходное уравнение:

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + \left(uv' - \frac{x^2}{uv}\right) = 0.$$

Найдем функцию ***u,*** удовлетворяющую условию $u' - \frac{u}{x} = 0$ (это линейное однородное дифференциальное уравнение).

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}.$$

Разделяя переменные, получим частное решение ***u=x***.

Подставим ***u=x*** в уравнение

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + \left(uv' - \frac{x^2}{uv}\right) = 0.$$

С учетом того, что $u' - \frac{u}{x} = 0$, приходи к уравнению с разделяющимися переменными $uv' - \frac{x^2}{uv} = 0 \Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{xv} \Leftrightarrow vdv = dx.$

Интегрируя обе части уравнения, приходим к решению $v = \pm\sqrt{2x + C}.$
Решение исходного уравнения (***y=u v)*** $y = \pm x\sqrt{2x + C}.$