

§4 Методы интегрирования.

Замена переменной в неопределённом интеграле

Теорема 1. Пусть функция φ определена и дифференцируемая на промежутке X , принимает значения из промежутка T . Функция g определена на промежутке T , имеет на нём первообразную G . Тогда функция f со значениями

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (1)$$

имеет первообразную на X , причём

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C. \quad (2)$$

На практике формулу (2) используют следующим образом:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x))d(\varphi(x)) \stackrel{t=\varphi(x)}{=} \int g(t)dt = \\ &= G(t) + C = G(\varphi(x)) + C \end{aligned} \quad (3)$$

Часто формулу (3) называют *формулой поднесения под знак дифференциала*.

Интегрирование методом подстановки

Теорема 2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ – строго монотонная и дифференцируемая на промежутке T функция, со значениями из промежутка X . Если функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ имеет первообразную F на промежутке T , то функция f имеет первообразную на промежутке X , причём

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(t) + C \stackrel{t=\varphi(x)}{=} F(\varphi(x)) + C,$$

где функция $\varphi(x)$ определена на промежутке X и является обратной для функции $\varphi(t)$.