13 Явление резонанса

1º. *Вынужденные коллебания в среде без сопротивления*

Рассмотрим уравнение

$$y'' + \omega^2 y = \frac{1}{m} F_в(t) \tag{1}$$

Пусть внешняя сила является синусоидальной $F_в(t) = D\sin qt$.

Обозначим $\frac{D}{m} = H$ и получим уравнение

$$y'' + \omega^2 y = H\sin qt. \tag{2}$$

Это ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного (исходного): $y(t) = y_а(t) + \tilde{y}(t)$.

Найдём решение соответствующего однородного уравнения. Однородное уравнение имеет вид $y'' + \omega^2 y = 0$. Его ХР

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \tag{3}$$

с корнями $\lambda_{1,2} = \pm\, i\omega$.

Общее решение однородного уравнения

$$y_а(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Сейчас найдём частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения (2) имеет специальный вид

$$f(t) = H\sin qt = He^{0t}\sin qt,$$

и определяет комплексное число $0 + iq$.

Вид частного решения $\tilde{y}(t)$ будет зависить от того, совпадёт ли число iq с корнем ХР (3) ($\lambda_{1,2} = \pm\, i\omega$).

Другими словами, совпадёт ли собственная частота ω системы с частотой q внешней силы.

Рассмотрим случай, когда частоты не совпадают ($q \neq \omega$).

Тогда частное решение уравнения (2) ищем в виде

$$\tilde{y}(t) = M\cos qt + N\sin qt.$$

Найдём производные

$\tilde{y}'(t) = -Mq\sin qt + Nq\cos qt,\ \tilde{y}''(t) = -Mq^2\cos qt - Nq^2\sin qt$

и подставим в (2)

$-Mq^2\cos qt - Nq^2\sin qt + \omega^2 M\cos qt + \omega^2 N\sin qt = H\sin qt$

Рассмотрим коэффициенты,

возле <u>$\cos qt$</u> : $-Mq^2 + \omega^2 M = 0,\ M(\omega^2 - q^2) = 0,\quad M = 0;$

возле <u>$\sin qt$</u> : $-Nq^2 + \omega^2 N = H,\ N(\omega^2 - q^2) = H,\quad N = \dfrac{H}{\omega^2 - q^2}.$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{H}{\omega^2 - q^2}\sin qt.$$

Движение состоит из двух коллебаний с разными частотами.

Если $\omega \to q$, амплитуда второго коллебания растёт. Это надо избегать в механических системах и использовать в радиоприёмниках при настройке частоты.

2°. *Явление резонанса*

Будем считать, что $q = \omega$ — собственная частота ω системы совпадает с частотой q внешней силы.

Тогда уравнение (11) имеет вид

$$y'' + q^2 y = H\sin qt. \tag{4}$$

и число iq является корнем ХР (3).

Частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\tilde{y}(t) = t(M\cos qt + N\sin qt).$$

Снова находим производные

$\tilde{y}'(t) = M\cos qt + N\sin qt - tMq\sin qt + tNq\cos qt,$

$\tilde{y}''(t) = -Mq\sin qt + Nq\cos qt - Mq\sin qt + Nq\cos qt - tMq^2\cos qt - tNq^2\sin qt =$

$= -2Mq\sin qt + 2Nq\cos qt - tMq^2\cos qt - tNq^2\sin qt.$

Подставляем в (4)

$$-2Mq\sin qt + 2Nq\cos qt - tMq^2\cos qt - tNq^2\sin qt +$$
$$+ q^2 t(M\cos qt + N\sin qt) = H\sin qt.$$

Рассмотрим коэффициенты,

возле <u>$\cos qt$</u> : $2Nq - tMq^2 + q^2tM = 0,\ \ 2Nq = 0,\ \ N = 0;$

возле <u>$\sin qt$</u> : $-2Mq - tNq^2 + q^2tN = H,\ \ M = -\dfrac{H}{2q}.$

Общее решение имеет вид

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) - \frac{H}{2q} t\cos qt.$$

Движение состоит из двух коллебаний одинаковой частоты, но амплитуда второго коллебания неограничено растёт.

<u>**Определение.**</u> Явление, когда при $t \to \infty$ амплитуда коллебания неограничено растёт, называется ***явлением резонанса***.

3°. *Вынужденные коллебания в среде с сопротивлением*

Считаем, что внешняя сила синусоидальная и рассмотрим уравнение

$$y'' + 2py' + \omega^2 y = H\sin qt. \tag{5}$$

Считаем также, что сопротивление среды мало $p < \omega$.

Общее решение состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного (исходного):

$$y(t) = y_{а}(t) + \tilde{y}(t).$$

Решение $y_{а}(t)$ мы уже получали в § 22:

$$y_{а}(t) = Ae^{-pt}\sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - p^2}$.

Число iq из правой части уравнения (5) не совпадает с корнями соответствующего ХР.

Частное решение $\tilde{y}(t)$ надо искать в виде

$$\tilde{y}(t) = M\cos qt + N\sin qt.$$

Находим производные

$\tilde{y}'(t) = -Mq\sin qt + Nq\cos qt, \qquad \tilde{y}''(t) = -Mq^2\cos qt - Nq^2\sin qt$

и подставляем в (5)

$$-Mq^2\cos qt - Nq^2\sin qt - 2pMq\sin qt + 2pNq\cos qt +$$
$$+\ \omega^2 M\cos qt + \omega^2 N\sin qt = H\sin qt$$

Рассмотрим коэффициенты,

при $\underline{\cos qt}$: $-Mq^2 + 2pNq + \omega^2 M = 0, \qquad (\omega^2 - q^2)M + 2pqN = 0,$

при $\underline{\sin qt}$: $-Nq^2 - 2pMq + \omega^2 N = H, \qquad -2pqM + (\omega^2 - q^2)N = H,$

$$M = -\frac{2pqH}{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq},\ N = -\frac{\left(\omega^2 - q^2\right)H}{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$y(t) = Ae^{-pt}\sin(\omega_1 t + \alpha) - R(2pq\cos qt - (\omega^2 - q^2)\sin qt),$

где $R = \dfrac{H}{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq}$.

Преобразуем выражение $\qquad 2pq\cos qt - (\omega^2 - q^2)\sin qt.$

Можна найти φ такое, что

$\cos\varphi = \dfrac{2pq}{\sqrt{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq}},\ \sin\varphi = \dfrac{\omega^2 - q^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq}}.$

Аналогично (см § 22): $2pq\cos qt - (\omega^2 - q^2)\sin qt =$

$$= \sqrt{(\omega^2 - q^2)^2 + 4pq}\,(\cos\varphi\cos qt - \sin\varphi\sin qt) =$$
$$= \sqrt{(\omega^2 - q^2)^2 + 4pq}\,\cos(qt + \varphi).$$

Окончательно получаем

$$y(t) = Ae^{-pt}\sin(\omega_1 t + \alpha) - \frac{H}{\sqrt{\left(\omega^2 - q^2\right)^2 + 4pq}}\cos(qt + \varphi).$$

Если t достаточно большое, собственные коллебания можно не учитывать. Но, если сопротивление среды p очень мало, а частоты ω и q близкие, то амплитуда коллебания может быть очень большой.