Предел и неравенства.

Теорема. *Если*

$\lim_{n\to\infty} x_n = A$,
$\lim_{n\to\infty} y_n = B$,
и $A<B$, *то* $\exists\ N: \forall\ n>N\ x_n<y_n$.

Теорема 10 (о трех последовательностях). *Пусть последовательности* x_n, y_n, z_n *удовлетворяют при любом* $n>N$ *условию:* $x_n \le y_n \le z_n$, *причем*

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$.
Тогда
$\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

Доказательство. Согласно определению предела $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1: \forall\ n>N_1$ *выполняется* $A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_2: \forall\ n > N_2$, $A-\varepsilon < z_n < A+\varepsilon$ Если $N = \max(N_1,N_2)$, тогда при $n>N$ получим $A-\varepsilon<x_n \le y_n \le z_n < A+\varepsilon$. Следовательно,

$|y_n-A|< \varepsilon$.

•

Следствие 2. *Если все члены последовательности принадлежат отрезку* $[a,b]$, *и* $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = c$, *то* $c \in [a,b]$.