Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{5n+4}=\dfrac{2}{5}.$

Решение

Шаг 1. По определению, число $\dfrac{2}{5}$ будет пределом последовательности с общим членом $x_n=\dfrac{2n-1}{5n+4}$ $(n\in\mathbb{N})$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется натуральное число n_ε, такое, что для всех членов последовательности x_n, номера которых $n>n_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{2n-1}{5n+4}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon.$$

Шаг 2. Решим это неравенство относительно n:

$$\left|\frac{10n-5-10n-8}{5(5n+4)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{-13}{5(5n+4)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{13}{5(5n+4)}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}.$$

Если $\varepsilon<\dfrac{13}{20}$, то $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}>0$, и в качестве n_ε можно взять целую часть числа $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}$, то есть $n_\varepsilon=\left[\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\right]$. Если $\varepsilon\geq\dfrac{13}{20}$, то $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\leq 0$ и требуемое неравенство выполняется для любого значения $n\in\mathbb{N}$.

Таким образом, для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует натуральное число

$$n_\varepsilon=\begin{cases}\left[\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\right], & \text{если } \varepsilon<\dfrac{13}{20},\\ 1, & \text{если } \varepsilon\geq\dfrac{13}{20},\end{cases}$$

такое, что все члены последовательности $x_n=\dfrac{2n-1}{5n+4}$, номера которых $n>n_\varepsilon$, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{5n+4}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon.$$

По определению это означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{5n+4}=\frac{2}{5}$.

Задача 2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{n+3}{2n^3+1}$ являтся бесконечно малой.

Решение

Шаг 1. Согласно определению, последовательность $x_n=\frac{n+3}{2n^3+1}$ будет бесконечно малой, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число n_ε такое, что все члены последовательности x_n с номерами $n>n_\varepsilon$, удовлетворяют неравенству $\left|\frac{n+3}{2n^3+1}\right|<\varepsilon$.

Шаг 2. Определим, начиная с какого значения *n* выполняется это неравенство. Так как $\frac{n+3}{2n^3+1}<\frac{n+3}{2n^3}<\frac{4n}{2n^3}=\frac{2}{n^2}$,

то из условия $\frac{2}{n^2}<\varepsilon$ тем более будет следовать, что $\frac{n+3}{2n^3+1}<\varepsilon$. Поскольку $\frac{2}{n^2}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, то $n_\varepsilon=\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$. Итак, если $n>\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$, то $\frac{n+3}{2n^3+1}<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{2n^3+1}=0$, что соответствует определению бесконечно малой последовательности.

Задача 3. Показать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{3^{n+1}}{2}$ является бесконечно большой.

Решение

Шаг 1. Последовательность $x_n=\frac{3^{n+1}}{2}$ является бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого положительного числа *E* найдется такое натуральное число n_E, что для всех членов последовательности x_n с номерами $n > n_E$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{3^{n+1}}{2}\right| > E.$$

Шаг 2. Определим, для каких *n* справедливо последнее неравенство. Имеем

$$\frac{3^{n+1}}{2} > E \Leftrightarrow 3^{n+1} > 2E \Leftrightarrow n+1 > \log_3(2E) \Leftrightarrow n > \log_3(2E) - 1.$$

Таким образом, для любого сколь угодно большого положительного числа $E > \frac{9}{2}$ найдется натуральное число $n_E = \left[\log_3(2E) - 1\right]$ такое, что для всех членов последовательности x_n с номерами $n > n_E$ выполняется неравенство $\left|\frac{3^{n+1}}{2}\right| > E$, то есть последовательность с общим членом $x_n = \frac{3^{n+1}}{2}s$ является бесконечно большой.

Замечание. Рассмотрим последовательность (задача 1)

$$x_n = \frac{2n-1}{5n+4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\left(n+\frac{4}{5}\right)-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{n+\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\frac{\frac{13}{10}}{n+\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} - \frac{13}{25}\cdot\frac{1}{n+\frac{4}{5}}.$$

Таким образом, последовательность $x_n = \frac{2n-1}{5n+4}$ $(n \in \mathbb{N})$,

представима в виде $x_n = \frac{2}{5} + \alpha_n,\ \alpha_n = \frac{13}{25\left(n+\frac{4}{5}\right)}.$

Отсюда следует, что

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{5n+4} = \frac{2}{5}.$

2) $x_n = \frac{2n-1}{5n+4}$ $(n \in \mathbb{N})$, возрастает.

Докажите эти факты самостоятельно.

Задание. Доказать:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n^2+1}=0.$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n^2=\infty.$$

Какие из этих последовательностей являются ограниченными (сверху, снизу), неограниченными, монотонными?